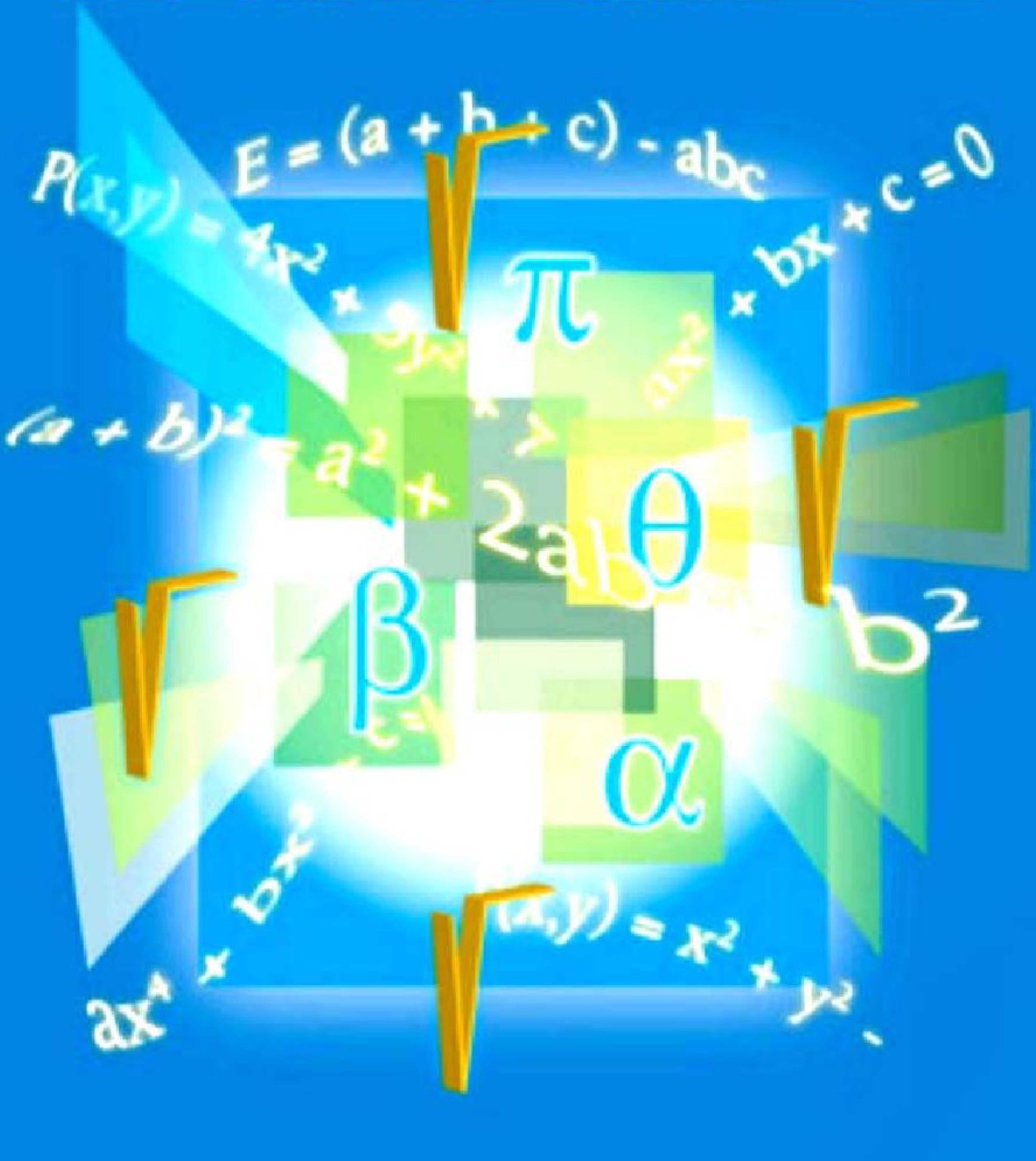
LIBRO DIGITAL

ÁLGEBRA

PREUNIVERSITARIA



Capítulo 1

LEYES DE EXPONENTES
ECUACIONES EXPONENCIALES

POTENCIACIÓN

Es la operación matemática que tiene por objetivo encontrar una expresión llamada potencia (p), conociendo previamente otras dos expresiones denominadas base (b) y exponente (n).

$$b^n = p \text{ ; donde } \begin{cases} b = \text{base} ; b \in \boldsymbol{R} \\ n = \text{exponente} ; n \in \boldsymbol{Z} \\ p = \text{potencia} ; p \in \boldsymbol{R} \end{cases}$$

Así pues, en $2^3 = 8$: 2 es la base, 3 es el exponente y 8 es la potencia.

DEFINICIONES

1. ***Exponente cero***

$$\boxed{a^0 = 1 \text{ ; } a \neq 0}$$

Ejemplo : $5^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$; $-7^0 = -1$

2. ***Exponente uno***

$$\boxed{a^1 = a}$$

Ejemplo : $4^1 = 4$

3. ***Exponente entero positivo***

$$\boxed{a^n = \underbrace{a.a.a. \ldots\ldots . a}_{\text{"n" veces}} \text{ ; } n \geq 2}$$

Ejemplo : $7^3 = 7.7.7 = 343$

4. ***Exponente negativo***.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad ; a \neq 0}$$

Ejemplo : $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

TEOREMAS

1. ***Multiplicación*** : bases iguales.

$$\boxed{a^m . a^n = a^{m+n}}$$

Ejemplo : $x^4 . x^2 = x^{4+2} = x^6$

2. ***División*** : bases iguales.

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad ; a \neq 0}$$

Ejemplo : $\frac{x^{10}}{x^7} = x^{10-7} = x^3$

3. ***Potencia de potencia***.

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m.n}}$$

Ejemplo : $(x^2)^5 = x^{2.5} = x^{10}$

4. ***Multiplicación*** : exponentes iguales.

$$\boxed{a^n b^n = (ab)^n}$$

Ejemplo :

$a^3 b^3 c^3 = (abc)^3$

$(x^2 . y^3)^5 = (x^2)^5 . (y^3)^5 = x^{10} . y^{15}$

5. ***División*** : exponentes iguales.

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad ; b \neq 0}$$

Ejemplo :

$$\frac{x^3}{y^3} = \left(\frac{x}{y}\right)^3$$

$$\left(\frac{x^4}{y^3}\right)^2 = \frac{(x^4)^2}{(y^3)^2} = \frac{x^8}{y^6}$$

RADICACIÓN

Es una de las operaciones matemáticas inversas a la potenciación cuyo objetivo es encontrar una expresión llamada raíz (b), conociendo otras dos expresiones denominadas radicando (a) e índice (n).

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ ; donde } \begin{cases} \sqrt{\ } = \text{signo radical} \\ n = \text{Índice; } n \in \boldsymbol{Z}^+ \\ a = \text{Radicando} \\ b = \text{Raíz; } b \in \boldsymbol{R} \end{cases}$$

Así pues : en $\sqrt[3]{64} = 4$: 3 es el índice, 64 el radicando y 4 la raíz.

DEFINICIONES:

1. $\forall a, b \in \boldsymbol{R}, n \in \boldsymbol{Z}^+$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n}$$

Ejemplos :

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

$$\sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow 9 = 3^2$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow -8 = (-2)^3$$

Observación : Debemos tener en cuenta que dentro del conjunto de los números reales no se define a la radicación cuando el índice es par y el radicando negativo, como en los ejemplos :

$\sqrt[4]{2004}$ existe en ***R***.

$\sqrt{-32}$ no existe en ***R***.

2. ***Exponente fraccionario***.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

Ejemplo :

$$(-8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{-8}^{\,2} = (-2)^2 = 4$$

3. $\forall a \in \boldsymbol{R} \wedge n \in \boldsymbol{Z}^+$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & ; n = \#\text{ impar} \\ |a| & ; n = \#\text{ par} \end{cases}$$

* $|a|$: valor absoluto de "a", significa el valor positivo de "a".

Ejemplo : $\sqrt[3]{x^3} = x$; $\sqrt{x^2} = |x|$

TEOREMAS :

1. ***Multiplicación*** : índices iguales.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}}$$

Ejemplo : $\sqrt[3]{x} \,.\, \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{xy}$

2. ***División*** : índices iguales.

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \text{ ; } b \neq 0}$$

Ejemplo : $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$

3. ***Raíz de raíz***.

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}}$$

Ejemplo : $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[3\times 2]{x} = \sqrt[6]{x}$

PROPIEDADES ADICIONALES

1. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}$; $ab \neq 0$

2. $a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}$; $a > 0$

3. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mk]{a^{nk}}$; $k \in Z^+$

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES TRASCENDENTES

Es aquella ecuación donde al menos uno de sus miembros no es una expresión algebraica, así pues tenemos:

a) Formando parte de algún exponente

Ej. $5^{x+1} = 125$; $2^{3^x} = 16$

b) Como base y exponente a la vez

Ej. $2^x - x = 5$; $x^x = 3$

c) Afectada por algún operador

Ej. $\text{Log}x^2 - x = 1$; $\text{Cos}(2x) = 0{,}5$

ECUACIÓN EXPONENCIAL :

Es la ecuación trascendente que presenta a su incógnita formando parte de algún exponente.

Ejemplo : $5^{x^2-1} = 25$

Teorema :

$$\boxed{a^x = a^y \Rightarrow x = y \ ; a > 0; a \neq 1}$$

Ejemplo : $7^{x-1} = 7^{5-x} \Rightarrow x - 1 = 5 - x$

$$2x = 6$$

$$\therefore \quad x = 3$$

Observación : Para resolver algunas ecuaciones trascendentes, a veces es necesario recurrir al proceso de comparación comúnmente llamado método de analogía, el cual consiste en dar forma a una parte de la igualdad tomando como modelo la otra. Veamos un ejemplo :

Ejemplo : $\quad x^{x^3} = 3$

Transformando al segundo miembro se tendrá :

$$x^{x^3} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}$$

$\therefore \ x = \sqrt[3]{3}$ (representa un valor de "x").

Sin embargo, debemos indicar que el método de analogía sólo nos brinda una solución, pudiendo haber otras, sino veamos el siguiente ejemplo :

En : $\sqrt[x]{x} = \sqrt{2}$ se observa que $x = 2$

Pero $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$, con lo cual tenemos :

$\sqrt[x]{x} = \sqrt[4]{4}$ de donde : $x = 4$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Calcular : A + B; sabiendo que :

$$A = (2\sqrt{3})^0 + (\frac{1}{2})^{-2} + 6\sqrt{5}^0 - 216^{\frac{1}{3}}$$

$$B = \left\{(\frac{1}{3})^{-2} + (\frac{1}{2})^{-4}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

a) 5 b) 10 c) 15
d) 20 e) 25

02. Reducir :

$$\frac{\left[3^{2^{x-1}}\right]^{2^{4-x}} . 3^{3^3}}{\left[(3^8)^{3^x}\right]^{3^{2-x}}}$$

a) 1 b) 3^{18} c) 3^{-37}
d) 3^{12} e) 3^{24}

03. Reducir :

$$U = \left(\frac{1}{16}\right)^{-\left(\frac{4}{9}\right)^{-32^{-\frac{1}{5}}}}$$

a) 48 b) 50 c) 16
d) 64 e) 32

04. Simplificar :

$$\sqrt[b]{\frac{6^a.16^b.3^{a+2b}}{18^{a+b}}}$$

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 12

05. Sabiendo que :

$$f_{(x)} = \left[\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}}\right]^{-x^{2/3}}$$

Calcular : $M = f_{(x)}^{f_{(x)}}$, para : x = 3.

a) $3^{-1/2}$ b) 3 c) 3^{-1}
d) $3^{-1/3}$ e) $3^{1/2}$

06. Si el exponente de "x" en :

$\sqrt[a]{x^b \sqrt[a]{x^b}}$ es 4, entonces el exponente de "x" en : $\sqrt[a^2]{(x^{a+1})^{2b}}$.

4 b) 2 c) 8
d) 16 e) 1

07. Sabiendo que : $\alpha n - \alpha + 1 = 0$.

Reducir : $\sqrt[n]{\frac{a}{\sqrt[\alpha]{a}}}$.

a) a^0 b) a^4 c) a
d) a^2 e) a^{-1}

08. Simplificar :

$$\underbrace{\sqrt[\sqrt[3]{3}]{\sqrt[\sqrt[3]{3}]{\sqrt[\sqrt[3]{3}]{\ldots\ldots\sqrt[\sqrt[3]{3}]{\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{n+3}}}}}}}_{\text{"n" radicales}}$$

a) 3 b) 9 c) 27
d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt[3]{3}$

09. Hallar el valor de "θ", si el exponente final de "x" en :

$\sqrt{x^{\alpha}\sqrt[3]{x^{\beta}\sqrt[5]{x^{\theta}}}}$ es la unidad. Además :

$$3\alpha + \beta = \frac{\theta}{5}$$

a) 10 b) 15 c) 20
d) 25 e) 30

10. Hallar el exponente final de :

$$\underbrace{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots\ldots\sqrt{x\sqrt{x}}}}}}_{\text{100 radicales}}$$

a) $\frac{3^{99}}{3^{90}-1}$ b) $\frac{2^{99}}{2^{99}-1}$ c) $\frac{2^{100}-1}{2^{100}}$
d) $\frac{2^{100}-1}{2^{100}+1}$ e) $\frac{3^{100}+1}{3^{100}}$

11. Hallar "x" :

$$4^{x}.8^{x+1} = 2^{2x-1}.16^{3x-2}$$

a) 1/3 b) 2/3 c) 4/5
d) 5/3 e) 4/3

12. Al resolver : $16^{3^{2x}} = 8^{4^{2x}}$

se obtiene la fracción irreductible : $\frac{p}{q}$.

Indique : p + q.

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

13. Resolver :

$$4^{x^2-3x} = \frac{\sqrt[3]{5}^{x}}{5}$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

14. Resolver :

$$9^{x+2} = 3^{2x} + 240$$

a) 2 b) 3 c) 0,5
d) $0,\hat{3}$ e) 6

15. Calcular "x", si : $\sqrt{3}^{\sqrt{2}^{x}} = 9$

a) -3 b) 4 c) 2
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

16. Resolver : $x^x = 6^{72}$; e indicar : $E = \sqrt{x} + \frac{x}{4}$.

a) 12 b) 15 c) 10
d) 9 e) 18

17. Hallar "x", de : $x^x = \sqrt[9]{\frac{1}{3}}$.

a) 3^{-1} b) 3^{-2} c) 3^{-3}
d) 3^{-6} e) 3^{-9}

18. Resolver :

$$\sqrt[x-13]{\frac{x^x - x^{13}}{x^{37} - x^x}} = \frac{1}{x}$$

a) 25 b) 20 c) 13
d) 50 e) 1

19. Resolver :

$$\sqrt{x} = \sqrt[2\cdot\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{5}}]{\sqrt{25}}$$

a) $\sqrt[5]{5}^{2}$ b) $\sqrt[5]{2}^{3}$ c) $\sqrt[5]{5}^{4}$
d) $\sqrt[5]{5}$ e) 5

20. Resolver : $x^{7^x} = \frac{1}{7^{\sqrt[7]{7}}}$

a) 7 b) $(\frac{1}{7})^{(\frac{1}{7})}$ c) $\frac{1}{7}$
d) $(\frac{1}{7})^{7}$ e) $\sqrt[7]{7}$

21. Calcular :

$$-(-11)^0 - 4\sqrt{5}^{0} + \left[\frac{2}{3}\right]^{-3} + \left[\frac{8}{5}\right]^{-1}$$

a) 0 b) 1 c) -1
d) -6 e) 2

22. Reducir :

$$\left[\frac{1}{3}\right]^{-\left[\frac{1}{9}\right]\left[\frac{1}{3}\right]^{-\left[\frac{1}{9}\right]\left[\frac{1}{3}\right]^{-3}}}$$

a) 9 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{9}$
d) 27 e) 3

23. Reducir :

$$\frac{\left[5^{4^{x-3}}\right]^{4^{5-x}} .5^{2^5}}{\left[\left[5^{6}\right]^{2^{y}}\right]^{2^{3-y}}}$$

a) 1 b) 3^3 c) 3^{18}
d) 4 e) 3^{24}

24. Calcular :

$$\left[\left[\sqrt[10^n]{8^{2^{n+1}}}\right]^{5^n}\right]^{3^{-1}}$$

a) 2 b) 8 c) 64
d) 4 e) 16

25. Sabiendo que :

$$P(x)=\left[\left[\sqrt[5]{x}^{\,-x^{\frac{3}{5}}}\right]^{\sqrt[5]{x}}\right]^{\sqrt[5]{x}}$$

Calcular : $N=P_{(5)}{}^{P_{(5)}}$.

a) $5^{-1/5}$ b) $5^{1/5}$ c) $5^{1/3}$
d) $\sqrt{5}$ e) 5^{-3}

26. Si el exponente de "x" en :

$\sqrt[a]{x^{b-1}.\sqrt[a]{x^{c}}}$ es 5, entonces el exponente de "x" en :

$$\sqrt[\frac{ab+c}{}]{(x^{5a+1})^{a}}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

27. Reducir :

$$\sqrt[n]{\frac{a}{\sqrt[\frac{n}{n-1}]{a}}}$$

a) a^{n} b) $\sqrt[n^2]{a}$ c) $\sqrt[n]{a}$
d) a^{n+1} e) $a^{n^{n}}$

28. Simplificar :

$$\underbrace{\sqrt[\sqrt[5]{5}]{\sqrt[\sqrt[5]{5}]{\sqrt[\sqrt[5]{5}]{\sqrt[\sqrt[5]{5}]{\cdots\cdots\sqrt[\sqrt[5]{5}]{\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{n+5}}}}}}}}_{\text{"n" radicales}}$$

a) 5 b) 10 c) 25
d) $\sqrt[5]{5}$ e) $\sqrt{5}$

29. Si : $a^{a}=a+1$, entonces el equivalente reducido de :

$\sqrt[a^{a^{a}}]{(a+1)^{(a+1)}}$ es :

a) 1 b) a c) 1/4
d) a^{2} e) $\sqrt[a]{a}$

30. En la siguiente ecuación :

$$\sqrt[3]{x^{2}\sqrt[3]{x^{2}\sqrt[3]{x^{2}.......\sqrt[3]{x^{2}}}}}=x^{k}$$

El miembro de la izquierda consta de "n" radicales. Si :

$k=\dfrac{80}{3^{n}}$ y $x=\dfrac{n}{2}$. Calcular : (n+ x).

a) 6 b) 3 c) 21
d) 8 e) 10

31. Resolver :

$$3^{4-x}.9^{6+x}.27^{10-x}=81^{4+x}$$

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

32. Resolver :

$$81^{3^{2x}}=27^{4^{2x}}$$

a) 2 b) 4 c) $\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{1}{4}$ e) 8

33. Resolver :

$$4^{x^{2}-2x}=\frac{\sqrt{7}^{x}}{7}$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

34. Resolver :

$$4^{x+1}=48-2^{2x+3}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

35. Calcular "x", si :

$$\sqrt[6]{5}^{\sqrt{3}^{x}}=\sqrt{5}$$

a) 1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 2

d) 3 e) $\dfrac{1}{4}$

36. Hallar "x" : $(2^{x})^{2}=2^{32}$.

a) 4 b) 8 c)16
d) 2 e) 32

37. Hallar "x" en :

$$\sqrt[6]{\frac{5^{15}-5^{x}}{5^{x-1}-5^{4}}}=5$$

a) 9 b) 12 c) 92
d) 6 e) 10

38. Hallar "x" de :

$$x^x = \sqrt[625]{\frac{1}{5}}$$

a) 5^{-1} b) 5^{-2} c) 5^{-3}
d) 5^{-4} e) 5^{-5}

39. Resolver :

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[6\cdot\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}^{2}}}]{64}$$

a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{8}$ c) $\sqrt{11}$
d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{15}$

40. Resolver :

$$x^{x^x} = 3^{-\frac{\sqrt[3]{9}}{3}}$$

a) $\frac{1}{3}$ b) 2 c) 9
d) $\sqrt[3]{3}$ e) $\sqrt[9]{3}$

41. Simplificar :

$$M = \frac{2^{n+1}.4^{-2n+1} + 8^{-n+2}}{16.(2^n)^{-3}}$$

a) 4,5 b) 3,5 c) 2,5
d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{2}$

42. Reducir :

$$\frac{2^{\frac{2x+3}{2}} \cdot \sqrt[4x]{4^{-x}}}{(0,5)\,\sqrt[x]{2}^{x^2}}$$

a) 2^{12} b) -2^2 c) 2^{-2}
d) 2^2 e) -2^3

43. Mostrar el equivalente de :

$$\left[\sqrt[\sqrt{2}^{\sqrt{2}}]{2^{\sqrt[\sqrt{2}]{2^2}}}\right]^{2^{-2^{-2^{-1}}}}$$

a) 2 b) $\sqrt{2}$ c) 4
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $2^{\sqrt{2}}$

44. Reducir :

$$E = \frac{m^m.n^n.p^p}{m^p.n^m.p^n}$$

Sabiendo que :

$$\sqrt[n]{mx} = \sqrt[p]{nx} = \sqrt[m]{px} = x$$

a) 2 b) 1 c) x
d) mnp e) x^{mnp}

45. Efectuar :

$$M = \sqrt[x]{\sqrt[1+x^{1+x}]{\sqrt{x}} \cdot \sqrt[1+x^{1+x}]{x^{x^x}}}$$

a) x^2 b) x^{-1} c) x^x
d) $\sqrt[x]{x}$ e) x

46. Calcular :

$$M = \left[\sqrt{8}^{\sqrt{8}^{\sqrt{8}}}\right]^{\left[\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}-6}}$$

a) $2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) 2
d) 8 e) 4

47. Si : m + n = 2mn ; reducir :

$$\frac{4^m - 4^n}{\sqrt[n]{2^m} - \sqrt[m]{2^n}}$$

a) 2^{-1} b) 1 c) -2^{-3}
d) 2 e) -4

48. Calcular :

$$\sqrt[\sqrt[3]{3}]{\sqrt[1+\sqrt[3]{3}]{2^{\sqrt[3]{9}}}\ \sqrt[\sqrt[3]{3}]{\sqrt[1+\sqrt[3]{3}]{2^{\sqrt[3]{9}}}}}$$

a) 2 b) $\sqrt[3]{2}/2$ c) 1/2
d) 8 e) $\sqrt{2}$

49. Hallar el valor de :

$$E = \sqrt[\sqrt{x}+1]{x^{\sqrt{8x}} \cdot \sqrt[\sqrt{x}+1]{x^{\sqrt{8x}} \cdot \sqrt[\sqrt{x}+1]{\ldots\ldots \infty}}}$$

para : $x = 2^{\sqrt{2}}$

a) 4 b) 16 c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{16}$

50. Simplificar :

$$\left[\frac{\sqrt[2]{7\sqrt[2^2]{7\sqrt[2^3]{7\ldots\ldots\sqrt[2^n]{7}}}}}{\left[\sqrt[4]{7\sqrt[4^2]{7\sqrt[4^3]{7\ldots\ldots\sqrt[4^n]{7}}}}\right]^3}\right].\sqrt[-4^n]{7}$$

Señale el exponente de 7.

a) $\frac{2}{2^n}$ b) 2^n c) $-\frac{1}{2^n}$

d) $\frac{1}{3n}$ e) $\frac{-n}{2n+1}$

51. Hallar "x" en :

$$27^{27^{x+1}} = 3^{9^{x-2}}$$

a) 6 b) 7 c) 8
d) -8 e) -7

52. Indique "x" en :

$$\sqrt{a^{x-1}}.\sqrt[3]{a^{2x+1}}.\sqrt[4]{a^{2-3x}} = 1;\ a \neq 0$$

a) 1/5 b) 3/5 c) -4/5
d) -2/5 e) 1

53. Resolver :

$$\left[\frac{2}{3}\right]^{2x-3}.\left[\frac{9}{4}\right]^{9x-4} - \left[\frac{2}{3}\right]^{-19x}\left[\frac{8}{27}\right]^{27} = 0$$

a) $\frac{19}{2}$ b) $\frac{76}{3}$ c) $\frac{8}{5}$

d) $\frac{1}{9}$ e) 2

54. Si :

$2^{2x} + 2^{2y} = 4$, y $2^{x+y} = 6$, el valor de $2^x + 2^y$ es :

a) -4 b) 4 c) 2
d) -2 e) 0

55. Hallar "x" de :

$$x = \sqrt{2} + \sqrt[(x-\sqrt{2})^2]{2}$$

a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $4\sqrt{2}$

d) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}-1}$

56. Resolver ecuación :

$$4^{x^2+\frac{1}{2}} - 3^{x^2-\frac{1}{2}} = 3^{x^2+\frac{1}{2}}$$

Entonces el cociente de las soluciones es :

a) -1 b) 0 c) 1
d) 2 e) 3

57. Calcular "x" en :

$$m^{x^{n-x}} = x^{x^{x^{x^n}}}\text{ , siendo : } m = x^{x^x}$$

a) n b) $\sqrt{n}$ c) $\sqrt[n]{n}$

d) n^n e) $\sqrt{n}^n$

58. Si : $x \varepsilon \boldsymbol{R}^+ / x \neq 1$; y además :

$$\sqrt[x]{x}^{\sqrt{x}^{x+1}} = x^{\sqrt{x}^{-x}}$$

Calcular : 2x.

a) 1/4 b) 2 c) 1
d) 1/2 e) 1/8

59. Hallar "x", en :

$$x^{-x^{2x^2}} = \sqrt[\sqrt{2}]{\sqrt{2}}\ ;\ x > 0$$

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e) $\sqrt{2}$

60. Hallar "x" : (x > 0).

$$\left[x^{1+x^{1+x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right]^{1/2} = x^{1/2+x^{1/2+x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[4]{5}$ c) $\sqrt[5]{4}$
d) 2 e) 8

Claves

01.	b	31.	b
02.	c	32.	c
03.	d	33.	c
04.	d	34.	b
05.	d	35.	c
06.	c	36.	c
07.	c	37.	e
08.	a	38.	e
09.	b	39.	b
10.	c	40.	a
11.	e	41.	a
12.	b	42.	d
13.	d	43.	a
14.	c	44.	b
15.	b	45.	d
16.	b	46.	d
17.	c	47.	d
18.	a	48.	a
19.	a	49.	b
20.	c	50.	c
21.	c	51.	d
22.	d	52.	c
23.	a	53.	b
24.	d	54.	b
25.	a	55.	b
26.	a	56.	a
27.	b	57.	c
28.	a	58.	c
29.	b	59.	c
30.	a	60.	c

Capítulo

2

POLINOMIOS

NOTACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se utiliza para indicar las variables de una expresión.

Ejemplos :

* $\underbrace{P(x)}_{\text{"P" de x}} \Rightarrow$ variable : "x".

* $\underbrace{F(x;y)}_{\text{"F" de xy}} \Rightarrow$ variables : x, y.

* $\underbrace{Q(x;y;z)}_{\text{"Q" de xyz}} = ax+by+cz \begin{cases} \text{variables} \rightarrow x;y;z \\ \text{constantes} \rightarrow a;b;c \end{cases}$

VALOR NUMÉRICO (V.N.)

Es el resultado que se obtiene al reemplazar las variables de una expresión algebraica por valores determinados.

Ejemplo :

1. ***Determinar el V.N. de la siguiente expresión :***

$\boldsymbol{P(x;y;z) = x^2+3yz}$ ***para : x = 5; y = -2; z = 3***

Reemplazando :

$P(5;-2;3) = 5^2+3(-2)(3) = 7$

2. ***Determinar P(3), si :***

$\boldsymbol{P(x) = x^3+2x-10}$.

En este caso, se pide el V.N. de P(x) para : x = 3.

$P(3) = 3^3+2(3)-10$

$P(3) = 23$

3. ***Determinar P(5), si :***

$\boldsymbol{P(x+7) = 2x^3+5x-1}$

Para este caso, se resuelve la ecuación : x + 7 = 5; de donde : x = -2.

Al reemplazar :

$$P(-2+7) = 2(-2)^3+5(-2)-1 = -16-10-1$$

$$P(5) = -27$$

PROPIEDADES : para un polinomio P(x).

1. Suma de coeficientes = P(1).

2. Término independiente = P(0).

CAMBIO DE VARIABLE

Así como las variables pueden reemplazarse por números, también pueden ser reemplazadas por otros polinomios, así tenemos:

1. ***Dado : P(x) = 2x+ 11 . Obtener P(x+ 7)***

Para obtener lo pedido, se reemplaza :

$\underline{x}$ por $\underline{x+7}$ en P(x).

$$P(\underbrace{x}_{\downarrow\, x+7}) = 2\underbrace{x}_{\downarrow\, x+7}+11$$

$P(x+7) = 2(x+7)+11$

$P(x+7) = 2x+25$

2. ***Dado : P(x+ 3) = 3x+ 4***

Determinar : P(2x- 5) .

Se reemplaza (x + 3) por (2x - 5) previa preparación del polinomio como :

P(x+ 3) = 3(x + 3 - 3)+ 4

Ahora : P(2x-5) = 3(2x-5-3)+ 4

Luego : P(2x-5) = 6x - 20

POLINOMIO

Es toda expresión algebraica racional y entera. Cuando tiene un término se denomina <u>monomio</u>, con dos se denomina <u>binomio</u>, con tres <u>trinomio</u>, etc.

Recordemos que en una expresión Algebraica Racional entera :

Ninguna variable está afectada por algún signo radical o exponente fraccionario.

Ninguna variable se encuentra en el denominador.

Ejemplo :

$$P(x;y) = 3x^2 + 7y + 5 \quad \text{polinomio (trinomio).}$$

$$P(x;y;z) = 2\sqrt{x} + 2y - z \quad \text{no es polinomio.}$$

GRADO :

Es la categoría que se asigna a un polinomio; y depende de los exponentes de sus variables.

GRADOS DE UN MONOMIO :

Grado Absoluto : es la suma de los exponentes de sus ***variables***.

Grado Relativo : es el exponente de la ***variable*** en referencia.

Ejemplo : $P(x;y) = 2a^3 x^4 y^5$

G. A. = 5 + 4

G.R. (x) = 4

G.R. (y) = 5

GRADOS DE UN POLINOMIO DE DOS Ó MÁS TÉRMINOS :

Grado Absoluto : es el mayor grado absoluto de uno de sus monomios.

Grado Relativo : es el mayor exponente de la variable en referencia.

Ejemplo :

$$P(x;y) = \underbrace{2x^3y}_{4} + \underbrace{7x^4 y^{\overset{\text{mayor}}{5}}}_{9} - \underbrace{6x^{\overset{\text{mayor}}{6}} y^2}_{8}$$

Grados → 4 9 8

G.A. = 9

G.R. (x) = 6

G.R. (y) = 5

POLINOMIOS IDÉNTICOS

Dos polinomios son idénticos si sus términos semejantes tienen igual coeficiente, así pues :

$$P(x) = ax^3 + bx + c$$

$$Q(x) = mx^3 + nx + p$$

son idénticos, si : a = m; b = n ; c = p.

Propiedad : dos polinomios idénticos tienen el mismo valor numérico para cada sistema de valores asignados a sus variables.

POLINOMIOS ESPECIALES

1. ***Polinomio Homogéneo*** : cuando sus términos son de igual grado absoluto.

   Ejemplo :

$$P(x;y) = \underbrace{2x^4y^3}_{7} - \underbrace{x^5y^2}_{7} + \underbrace{5x^6y}_{7}$$

   Homogéneo de grado 7.

2. ***Polinomio Completo*** : cuando tiene todos los exponentes de la variable en referencia, desde el mayor hasta el cero incluido.

   Ejemplo :

   "x" tiene exponente "1"   "x" tiene exponente cero

$$P(x;y) = 2x^{1}y^3 + 7x^{2}y^4 - 5y\,x^{0}$$

   completo con respecto a "x" .

   Propiedad : para un polinomio completo P(x).

$$\boxed{\#\ \text{términos} = \text{Grado} + 1}$$

3. ***Polinomio Ordenado*** : es aquel cuyos exponentes de la variable en referencia (ordenatriz) van aumentado (orden creciente) o disminuyendo (orden decreciente).

   Ejemplo :

   aumenta

$$P(x;y) = 4x^4y^{3} + 6x^7y^{9} + 5xy^{20}$$

   ordenado ascendentemente respecto a "y".

POLINOMIO IDÉNTICAMENTE NULO

Es aquel polinomio cuyos términos presentan coeficientes iguales a cero, como por ejemplo :

$$P(x) \equiv ax^3 + bx^2 + c$$

será idénticamente nulo, si :

a = 0; b = 0; c = 0.

Propiedad : todo polinomio idénticamente nulo tiene valor numérico igual a cero para cualquier sistema de valores asignados a sus variables.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Hallar : P[P(3)]. Si : P(x) = 2x - 5.

a) 1 b) 3 c) -3
d) -1 e) 5

02. Si se cumple : $P_{(x)} - P_{(x-1)} = x$
para algún polinomio no constante.
Calcular : $P_{(4)} - P_{(0)}$.

a) 9 b) 10 c) 20
d) 0 e) 15

03. Sean los polinomios :

$$P_{(x)} = ax + b \ \wedge \ Q_{(x)} = bx + a$$

siendo : $(a \neq b)$. Además :

$$P_{(Q(x))} \equiv Q_{(P(x))}$$

Hallar : $P_{(Q(1))}$.

a) b b) a c) 1
d) -b e) ab

04. Dado el polinomio :

$$P(x\,;y) = 4m^n x^{2m+3n} y^{5n-m}$$

Si : GA(P) = 10 $\wedge$ GR(x) = 7.

Calcular su coeficiente.

a) 5 b) 64 c) 16
d) 8 e) 2

05. Dado el polinomio :

$$P(x,y) = 7x^2y^{m+3} + 4x^5y^{m-4} + 3x^4y^{m+5} + x^6y^{m-2}$$

Si : GR(x) + GR(y) + G.A. = 32.
Entoces el valor de "m" es :

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

06. Si el polinomio :

$$R_{(x\,;y\,;z)} = x^{a^b} + x^7 y^{b^a} + x^{20} z^{12}$$

es homogéneo. Calcular : $(a-b)^2$.

a) 16 b) 9 c) 5
d) 3 e) 1

07. Determinar cuál es la suma de los coeficientes "m" y "n", de modo que para cualquier valor de "x", se cumple:

$$7 - x \equiv m(x-1) + n(x+2)$$

a) -1 b) 1 c) -2
d) 0 e) 2

08. Dado el polinomio :

$$P_{(x\,;y)} = (a-4)xy^2 - (20-b)x^2y + ax^2y$$

Si : $P_{(x\,;y)} \equiv 0$. Calcular :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab}$$

a) 8 b) 18 c) 20
d) 14 e) 28

09. Sea el polinomio :

$$P(x) = (2x-1)^n + nx$$

con "n" impar, si la suma de sus coeficientes aumentado en el duplo de su término independiente resulta 16, entonces "n" es :

a) 15 b) 19 c) 17
d) 21 e) 13

10. Dado el polinomio :

$$R_{(x)} = (2x^4-3)^m (mx^5-1)^5 (2x^m - x - m)^3$$

Indique el coeficiente principal, si el término independiente es 72.

a) 1024 b) 243 c) 624
d) 512 e) 64

11. Si :

$$P_{(x)} = (n-2)x^{n-9}y + (n-3)x^{n-8}y^2 + \\ + (n-4)x^{n-7}y^3 + ...$$

es ordenado y completo. Hallar el número de términos.

a) 7 b)9 c) 11
d) 5 c) 13

12. Si :

$$P_{(x+2)} = 6x + 1$$

$$P_{(F_{(x)})} = 12x - 17$$

Obtener : $F_{(10)}$.

a) 23 b) 20 c) 22
d) 21 e) 19

13. Dada la expresión : $P_{(x)}$, tal que :

$P_{(x)} \equiv P_{(x-1)} + P_{(x-2)}$, además : $P_{(1)} = 3$;
$P_{(2)} = 4$. Calcular : P(P(P(0))).

a) 7 b) 4 c) 3
d) 1 e) 14

14. Dado el polinomio :

$$P(x)=x^{a-5}+3x^{a+1}+5x^{7-a}-7$$

Hallar la suma de valores que puede asumir "a".

a) 6 b) 11 c) 13
d) 18 e) 21

15. En el polinomio homogéneo :

$$P(x,y,z)=(xy)^{3a^{b-a}}+y^{b^{a-b}}+2z^{c}$$

Calcular : a + b + c.

a) 3 b) 5 c) 7
d) 9 e) 15

16. Si se cumple :

$$P_{(x)}=x^{2}+3x+(x-2)\,q(x)$$

$$R_{(x)}=5x-2+P(x+1)$$

Hallar la suma de coeficientes del polinomio $R_{(x)}$.

a) 11 b) 9 c) -7
d) 13 e) -6

17. Si : $F_{(x)}=x^{3}(x^{18}+125x^{15})+2(x+5)$

Hallar :

$$K=[F_{(1)}+F_{(2)}+F_{(3)}+...+F_{(99)}]^{F(-5)}$$

a) 0 b) 243 c) 1024
d) 23 499 e) 1

18. Hallar : m - n + p; si se sabe que el polinomio:

$$Q(x)=x^{m-10}+x^{m-n+5}+x^{p-n+6}$$

es completo y ordenado en forma decreciente.

a) 8 b) 2 c) 6
d) 10 e) 4

19. Si la siguiente expresión matemática se reduce a un polinomio :

$$P(x,y,z)=a\sqrt[a]{x^{b}}+b\sqrt[b]{x^{c}}+c\sqrt[c]{x^{a}}$$

Hallar el valor de : a - 2c + b.

a) -1 b) -2 c) 1
d) 2 e) 0

20. Sea "f" una función definida en el conjunto de los números reales tal que verifica las siguientes propiedades :

$$f_{(x+y)}=f_{(x)}+f_{(y)};\ f_{(1)}=2$$

Calcular : $f_{(1+2+...+10)}$.

a) 220 b) 20 c) 40
d) 55 e) 110

21. Si : $H_{(x-1)}=f_{(x)}+g_{(x)}$

Donde : $f_{(x-2)}=2x+4$

$$g_{(x+2)}=3x^{2}+6x+1$$

Hallar : H(5).

a) 62 b) 78 c) 87
d) 93 e) 99

22. Si :

$P_{(x)}=ax^{2}+b$ y $P_{(P(x))}=8x^{4}+24x^{2}+c$

El valor de : a + b + c, es :

a) 28 b) 32 c) 30
d) 31 e) 26

23. Indique el grado de :

$$R_{(x;y)}=x^{a-5}y^{\frac{a}{2}+1}+x^{a-4}y^{\frac{a}{4}+1}+x^{11-a}$$

a) 7 b) 8 c) 4
d) 6 e) 3

24. Si el polinomio :

$$P(x;y)=nx^{n+m}y-x^{r-1}y+my^{m+5}x^{3}$$

es homogéneo y con grado relativo respecto a "y" igual a 3. Hallar el grado relativo de "x".

a) 3 b) 5 c) 7
d) 9 e) 11

25. Sean los polinomios :

$P_{(x)}=ax^{3}+bx^{2}+cx+d$; $Q_{(x)}=ax^{2}+d$;

$R_{(x)}=ax+b$.

Si : $P_{(0)}=2$; $Q_{(1)}=R_{(2)}=1$.

Hallar "x", tal que : $R_{(x)}=0$.

a) -3 b) -1 c) 0
d) 1 e) 3

26. Determinar en cuanto difieren "p" y "q" para que con cualquier valor de "x" se cumpla que :

$$27+8x\equiv p(x+4)+q(2x+3)$$

a) 7 b) 5 c) 1
d) 3 e) 2

27. Hallar : m . n, si el polinomio es homogéneo.

$$P(x;y)=x^{n-3}y^{7}+(x^{2}y^{2})^{4}+x^{m}y^{4}$$

a) 100 b) 124 c) 144
d) 140 e) 70

28. El grado de homogeneidad del polinomio :

$$P(x;y) = x^a y^{2b+c} + x^{a+b} y^{2c} + x^{a+2c} y^{a-2b}$$

es 6. Calcular el valor de : E = a + b + c.

a) 9 b) 7 c) 5
d) 3 e) 11

29. Sea el polinomio :

$$P_{(2x)} = a_0 x + 2a_1 x^2 + 2^2 a_2 x^3 + ... + 2^5 a_5 x^6$$

Hallar la suma de coeficientes de $P_{(x)}$, si su término independiente es $a_5 - 2$ y además:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8 \ ; \ a_0 \neq 0$$

a) 3 b) 5 c) 7
d) 2 e) 1

30. Dados los polinomios :

$$f_{(x)} = a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-1)(x-3)$$

$$g_{(x)} = x^2 - 2x + 9$$

Si : $f_{(x)} = g_{(x)}; \ \forall x \varepsilon \boldsymbol{R}$

Determine el valor de : a+ b+ c.

a) -1 b) 0 c) 1
d) 2 e) 1/2

31. Si : $f(x) = \dfrac{x+c}{x-1} \quad x \neq 1; \ \ c \neq 1$.

f(f(x)) será :

a) $\dfrac{c}{x-1}$ b) $\dfrac{x}{x-1}$ c) c
d) 1 e) x

32. Si : $f_{(x-2)} = x^2 + 1$ y $h_{(x+1)} = 3x + 1$, se tiene que $h(f_{(0)}) + h_{(-5)}$ es :

a) 82 b) -17 c) 193
d) 28 e) -4

33. Hallar "n", si el grado de :

$$\sqrt{\frac{x\sqrt{x^n}}{\sqrt[3]{x}}} \text{ es } 5$$

a) 5/3 b) 56 c) 56/3
d) 56/5 e) 5/6

34. Dado el monomio :

$$M(x;y) = 4a^b x^{2a+3b} y^{5b-a}$$

se tiene : GA(M) = 10; GR(x) = 7.
Señalar su coeficiente.

a) 2 b) 4 c) 8
d) 16 e) 64

35. Si la suma de coeficientes del polinomio P(x) es 13.

$$P(x) = a(2-x)^{10} + b(3-2x)^8 + 5$$

Hallar : a + b.

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

36. Definimos un polinomio P(x) x ε R.

$$P(x) = (x+n-2)^4 - (x+n-3)^3 + 2$$

en el cual el término independiente es 17. Calcular "n".

a) 1 b) 4 c) 2
d) 5 e) 3

37. Hallar : m - n + p; si se sabe que el polinomio:

$$Q(x) = x^{m-10} + x^{m-n+5} + x^{p-n+6}$$

es completo y ordenado en forma decreciente.

a) 8 b) 2 c) 6
d) 10 e) 4

38. Sabiendo que el polinomio :

$$A(x;y) = 7x^{a+2} y^{b+3} + 8x^c y^{d+1} - 5x^{2a+3} y^{b+1}$$

es homogéneo. Hallar "a".

a) 0 b) 2 c) 1
d) -3 e) -4

39. Si el polinomio :

$$R_{(x)} = (a+b-2)x^2 - (a+c-3)x + (b+c-5)$$

se anula para :
x = 2001; x = 2002; x = 2003; x = 2004.
Hallar : a-b+ c.

a) -1 b) 2 c) 1
d) 0 e) 2001

40. Sea $P_{(x)}$ un polinomio mónico de grado 3; halle la suma de coeficientes del término cuadrático y lineal, siendo su término independiente igual a 5.
Además :

$$P_{(x+1)} = P_{(x)} + nx + 2$$

a) 1 b) 0 c) 2
d) 3 e) 4

41. Dado un polinomio lineal $P_{(x)}$, que presenta resultados mostrados en el cuadro :

x	1	2
$P_{(x)}$	4	6

Calcule : $P_{(5)}+P_{(0)}$.

a) 18 b) 16 c) 12
d) 14 e) 8

42. Si : $f_{(x^2-2x+1)}=x^2-3$, entonces $f_{(x-2)}$ es:

a) x^2+2x-2 b) $x^2+2\sqrt{x-2}$
c) $x+2\sqrt{x-2}-4$ d) $(x-\sqrt{2})^2+1$
e) $x-2\sqrt{x-2}+4$

43. ¿Para cuántos valores de "b" el polinomio :

$$P_{(x;y)}=ab\,x^{a-b}y^{a+b}-b^2y^4$$

es homogéneo?

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) Más de 4

44. Calcular : m - n, si el polinomio :

$$P(x;y)=3x^{2m+n-4}.y^{m+n+2}+7x^{2m+n-3}y^{m+n+1}-7x^{2m+n-2}.y^{m+n}$$

es de grado 10 y la diferencia entre los grados relativos a "x" e "y" es 4.

a) 6 b) 9 c) 14
d) 15 e) 18

45. Si el polinomio P(x;y) es idéntiamente nulo. Hallar : ab.

$$P(x;y)=(a+b)x^3y+2x^4y^5-18x^3y+(b-a)x^4y^5$$

a) 10 b) 20 c) 40
d) 60 e) 80

46. En el polinomio :

$$P(x+1)=(2x+1)^n+(x+2)^n-128(2x+3)$$

donde "n" es impar, la suma de coeficientes y el término independiente suman 1, luego el valor de "n" es :

a) 5 b) 7 c) 9
d) 11 e) 13

47. Si :

$$P_{(x)}=(n-2)x^{n-9}y+(n-3)x^{n-8}y^2+(n-4)x^{n-7}y^3+...$$

es ordenado y completo. Hallar el número de términos.

a) 7 b) 9 c) 11
d) 5 c) 13

48. Dada la función "f", tal que :

$$f_{\left(\sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}\right)}=2x^2-18 \qquad x\ \varepsilon\ \boldsymbol{R}$$

Calcular : $\dfrac{f_{(1)}+f_{(-1)}}{2}$

a) 11 b) 7 c) 10
d) 9 e) 8

49. Proporcionar la suma de coeficientes del siguiente trinomio :

$$P(x;y)=(m-3)x^{9-m}+mx^{m-2}.y^{\frac{m}{3}}+y^{17-2m}$$

a) 4 b) 6 c) 8
d) 10 e) 12

50. Siendo :

$$P_{\left(\frac{1}{ax+1}\right)}=a^2x+3a+1$$

Obtener : $P_{\left(-\frac{1}{2}\right)}$

a) 1 b) 2 c) -3
d) -2 e) 0

51. Si : $f_{(x+1)}=f_{(x)}+2x+4$; y $f_{(0)}=2$,

entonces $f_{(1)}+f_{(-1)}$ vale :

a) 0 b) 2 c) 6
d) -2 e) -6

52. Si : $f_{(x^x)}=\sqrt[x^{x+1}]{x^{x^{2x+2}}}$

Además : $f_{(x^{x+1})}=3125$.

Calcular : $P=\sqrt{f_{(x+2)}}$.

a) 16 b) 10 c) 18
d) 14 e) 12

53. Q(x) es un polinomio que cumple las siguientes condiciones :
I. Q(3) = Q(5) = 0
II. Grado mínimo
III. Suma de coeficientes 16.

Calcular el término independiente de Q(x).

a) 18 b) 15 c) 30
d) 45 e) 32

54. Sabiendo que :

$$P(x;y) = (5x-3y)^{n+1} + 5n$$

es tal que la suma de coeficiente es igual al término independiente aumentado en 1024. Hallar "n".

a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

55. Si el trinomio :

$$F(x) = \sqrt[a]{x^{a+b}} + \sqrt[b]{x^{b+c}} + \sqrt[c]{x^{a+c}}$$

es homogéneo de grado (10), de qué grado es el monomio.

$$S(x;y;z) = \sqrt[a]{x^b} \cdot \sqrt[c]{y^a} \cdot \sqrt[b]{z^c}$$

a) 7 b) 13 c) 27
d) 33 e) 30

56. Calcular la suma de coeficientes del siguiente polinomio completo :

$$P(x) = c(x^a + x^b) + a(x^b + x^c) + b(x^a + x^c) + abc$$

Si : $a \neq b \neq c$.

a) 6 b) 9 c) 12
d) 15 e) 18

57. El polinomio :

$$A(x) = ax^m + bx^n + cx^p + dx^q + mp$$

es completo y ordenado, con suma de coeficientes igual a 13.
Indicar : a + b + c + d.

a) 5 b)10 c) 8
d) 6 e) 9

58. Si : $f_{(x+1)} = x^2$

Hallar : $f_{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)}$, $x \neq 0$

a) $\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2$ b) $\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$

c) $\frac{1}{x^2}(x^2+x+1)^2$ d) $(x^2-x-1)^2$

e) $\frac{1}{x^2}(x^2-x-1)^2$

59. Sean : P, Q dos polinomios dados por :

$$P_{(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$Q_{(x)} = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$$

Si : $P_{(x)} \equiv Q_{(x-1)}$, determinar el valor de :

a+ b + c + d

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 5

60. Si : $R_{(\frac{x}{5}-3)} = x + 1$

Además : $R_{(F_{(\frac{2x}{9}+7)})} = 20x + 1$

Calcular : $F_{(x)}$.

a) 15x - 9 b) 8x - 129 c) 18x - 129
d) 18x - 29 e) -18x + 129

Claves

01.	c
02.	b
03.	c
04.	d
05.	c
06.	b
07.	a
08.	d
09.	c
10.	a
11.	a
12.	e
13.	a
14.	d
15.	c
16.	d
17.	e
18.	c
19.	e
20.	e
21.	d
22.	e
23.	b
24.	b
25.	e
26.	b
27.	c
28.	c
29.	b
30.	c

31.	c
32.	e
33.	c
34.	c
35.	e
36.	b
37.	c
38.	c
39.	c
40.	a
41.	d
42.	c
43.	c
44.	c
45.	e
46.	c
47.	b
48.	e
49.	d
50.	a
51.	c
52.	a
53.	c
54.	d
55.	c
56.	e
57.	a
58.	e
59.	b
60.	c

Capítulo

3

PRODUCTOS NOTABLES

MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

Es la operación que tiene como objetivo determinar una expresión algebraica llamada producto, dadas otras expresiones algebraicas llamadas multiplicando y multiplicador, la igualdad obtenida es una identidad.

Ejemplo :

$$\underbrace{\underbrace{(x+2)}\,\underbrace{(2x+1)}}_{\text{multiplicando y multiplicador}} \underbrace{=}_{\text{identidad}} \underbrace{2x^2+5x+2}_{\text{producto}}$$

PRODUCTOS NOTABLES O IDENTIDADES ALGEBRAICAS

1. ***Binomio al cuadrado***

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

Nota : $(a-b)^2 = (b-a)^2$ en general : $(a-b)^{2m} = (b-a)^{2m}$; $(m \in Z)$

2. ***Identidades de Legendre***

- $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$
- $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$

3. ***Diferencia de cuadrados***

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

4. ***Binomio al cubo***

- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ***ó*** $\underbrace{(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)}_{\text{Identidad de Cauchy}}$
- $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ***ó*** $\underbrace{(a+b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)}_{\text{Identidad de Cauchy}}$

5. ***Identidades de Steven***

- $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$
- $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$

6. ***Suma y diferencia de cubos***

- $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$
- $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

7. ***Trinomio al cuadrado***

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

8. ***Trinomio al cubo***

$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2c+3b^2a+3c^2a+3c^2b+6abc$

ó

$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$

IDENTIDADES ADICIONALES

1. ***Identidad de Argan'd***

$(a^{2n}+a^nb^m+b^{2m})(a^{2n}-a^nb^m+b^{2m}) = a^{4n}+a^{2n}b^{2m}+b^{4m}$

* Caso particular : $(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4+x^2+1$

2. ***Identidades de Lagrange***

- $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2+(ay-bx)^2$
- $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2$

3. ***Identidad de Gauss***

- $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc$

  de donde :
- $\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] = a^3+b^3+c^3-3abc$

4. ***Otras identidades*** :

- $(a+b+c)(ab+ac+bc) = (a+b)(a+c)(b+c)+abc$
- $(a+b)^4-(a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)$
- $(ab+ac+bc)^2 = a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)$

Algunas Relaciones Condicionadas :

I. Si : $a+b+c=0$

1. $a^2+b^2+c^2 = -2(ab+ac+bc)$
2. $a^3+b^3+c^3 = 3abc$
3. $a^4+b^4+c^4 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$
4. $a^5+b^5+c^5 = -5abc(ab+ac+bc)$

II. Si : $x; y; z \in R \,/\, x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx$,
entonces : $x = y = z$.

II. Si : $x; y; z \in R \wedge m; n; p \in Z^+ \,/\, x^{2m}+y^{2m}+z^{2p} = 0$,
entonces : $x = 0; y = 0; z = 0$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Si : $x^3 + y^3 = 20$; $xy = 5$

Calcular :

$$M = (x+y)^3 - 15(x+y) + 15$$

a) 40 b) 35 c) 20
d) 30 e) 15

02. Efectuar :

$$(a+b)(a-b)(a^2+b^2)+(b^4+a^4)$$

a) $2a^2$ b) $2b^2$ c) $2a^4$
d) $2b^4$ e) 0

03. Si : $x + y = 4$; calcular :

$$E = \frac{x^3+y^3-64}{x^2+y^2-16}$$

a) 6 b) -4 c) -3
d) -6 e) 2

04. Si : $a+b = \sqrt{5}$ y $a.b = 3$.

Entonces $(a-b)^2$ es :

a) 6 b) -7 c) -9
d) 12 e) 10

05. Si : $x + \frac{1}{x} = 4$

Hallar : $(x^2+x^{-2})(x^3+x^{-3})$

a) 243 b) 240 c) 728
d) 120 e) 3

06. Sabiendo que : $x + \frac{1}{x} = 3$; determinar el valor de :

$$E = x^3 + x^2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}$$

a) 49 b) 36 c) 25
d) 18 e) 23

07. Determine :

$$x^2 + \frac{1}{x^2}; \text{ si : } x + \frac{1}{x} = a$$

a) (a-2)(a+ 2) b) $a^2 - \sqrt{2}$

c) $(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})$ d) $(a-\sqrt{2})(a+2)$

e) $a^2 + 2$

08. Si :

$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3$, entonces $a^3 + \frac{1}{a^3}$ es :

a) 27 b) 6 c) 12
d) 4,3758 e) 0

09. Hallar el V.N. de :

$$E = (m^{-3} + n^{-3})^{-1}$$

Si : $mn = 2$ y $m + n = 2\sqrt{2}$.

a) 2 b) 1 c) $\sqrt{2}$
d) 3 e) 4

10. Si :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 167 ; x > 0 ; y > 0$$

Calcular :

$$E = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

a) 12 b) 13 c) $\sqrt{167}$

d) $\sqrt{3}$ e) 11

11. Si : $(x+y)^2 = 2(x^2+y^2)$, el valor de :

$E = \frac{3x^3 - y^3}{x^2y} + \frac{3x+2y}{5x} + \frac{6y}{2x+y}$ es :

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 2

12. Calcular :

$$V = \frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{x+2y}{2x} + \frac{2y}{x+3y}$$

si : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{x+y}$

a) 2 b) 3 c) 1
d) 4 e) 6

13. Calcular :

$$\sqrt[3]{x^2\sqrt{x} + \sqrt{x^5+27}}\ \sqrt[3]{x^2\sqrt{x} - \sqrt{x^5+27}}$$

a) x - 3 b) 3 c) x

d) -3 e) $\sqrt[3]{x^5}$

14. Calcular :

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)+(a-b)(a^2+ab+b^2)+3a^3$$

a) $4a^3$ b) $4b^3$ c) $5a^3$
d) $2b^3$ e) b^3

15. La expresión simplificada de :

$(a^b+a^{-b})(a^b-a^{-b})(a^{4b}+1+a^{-4b})$ es :

a) $(a^b-a^{-b})^6$ b) $(a^b-a^{-b})^6$
c) $a^{-6b}-a^{6b}$ d) $a^{6b}-a^{-6b}$
e) $a^{6b}+a^{-6b}$

16. Hallar el V.N. de :

$$E=(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2-(a+b+c)^2$$

para :

$a=\sqrt{\sqrt{5}+3}$; $b=\sqrt{\sqrt{5}+7}$; $c=\sqrt{40-2\sqrt{5}}$

a) 0 b) 10 c) 47
d) 50 e) 40

17. Sabiendo que : $x+y+z=1$
Calcular :

$$M=\frac{x^3+y^3+z^3-1}{xy+yz+zx-xyz}$$

a) 1 b) -1 c) -3
d) 3 e) 2

18. Si : $x+y+z=3$
$xy+yz+xz=0$
Calcular :

$$\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

a) 3 b) 2 c) -2
d) -1 e) 1

19. Calcular el producto abc, sabiendo que :

$a+b+c=15$; $a^2+b^2+c^2=93$

$a^3+b^3+c^3=645$

a) No se puede determinar.
b) 80 c) 70
d) 60 e) 75

20. Sabiendo que : $F_{(x)}=a^x+b^x+c^x$.

Calcular : abc, además : $F_{(n)}=n$; $n\,\varepsilon\{1, 2, 3\}$

a) 4^{-1} b) 2^{-1} c) 3^{-1}
d) 6^{-1} e) 5^{-1}

21. Sabiendo que :

$a^3+b^3+c^3=3$

$a^2+b^2+c^2=2$

Calcular :

$$E=\frac{(a+b+c)(2-ab-ac-bc)}{1-abc}$$

a) 1/3 b) 3 c) 2
d) 1/2 e) 1

22. Evaluar :

$$\sqrt[16]{3.5.17.257+1}$$

a) 2 b) 4 c) 8
d) 16 e) 32

23. Si :

$a=\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}$

$b=\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2}$

Calcular : $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$

a) 4 b) $\sqrt{2}$ c) 2
d) $2\sqrt{2}$ e) $4\sqrt{2}$

24. Si : $\sqrt{m^2+n^2}+\sqrt{m^2-n^2}=n^2$
Calcular :

$$R=\sqrt{m^2+n^2}-\sqrt{m^2-n^2}$$

a) 2 b) n^2 c) 1
d) m^2 e) 0

25. Si :

$$\frac{mn+n^2}{3n-m}=\sqrt[n]{\sqrt{n^n}+\sqrt{n^n-m^n}}\;\sqrt[n]{\sqrt{n^n}-\sqrt{n^n-m^n}}$$

Calcular el valor de :

$$\frac{mn+m^2}{mn+n^2}+\frac{m^5-n^5}{m^2+m^3}$$

a) 1 b) 0 c) m + n
c) n^2 e) n - 1

26. Reducir :

$$K=(m+4)^3-(m+3)(m+4)(m+5)$$

a) m^2 b) m c) m+ 3
d) m+ 4 e) m+ 8

27. Determinar el valor numérico de :

$$(\frac{y}{x})(\frac{x-1}{y-1})+(\frac{y+1}{x+1})(\frac{x}{y})$$

Siendo : $x=\sqrt[4]{9}+\sqrt{2}$; $y=\sqrt{3}-\sqrt[4]{4}$

a) 1 b) -1 c) 2
d) -2 e) $2\sqrt{2}$

28. Si : a + b+ c = 0, reducir :

$$M=\frac{a^2+b^2-c^2}{a}+\frac{b^2+c^2-a^2}{b}+\frac{c^2+a^2-b^2}{c}$$

a) 1 b) 0 c) 3
d) -1 e) 2

29. Si se tiene como suma "s" y producto "p" de dos cantidades x, y, entonces :

$$\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 \text{ es igual a :}$$

a) $(s+p)^2-(s+p)^2$

b) $s^4+2ps^2-3p^2s+p^4$

c) $s^4+ps(1-s)+\frac{3}{2}p^2$

d) $s^4-ps+\frac{3}{2}p^2$

e) $0,25\,s^4-ps^2+p^2$

30. Sabiendo que :

$$x=\frac{2}{n}(a_1+a_2+a_3+...+a_n)$$

$$n=a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2$$

Calcular :

$$(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+(x-a_3)^2+...+(x-a_n)^2$$

a) 0 b) n c) n^2

d) n - 1 e) $(n-1)^2$

31. Sean "a" y "b" números reales positivos, tales que :

$a^2+b^2=13$ y $b.a=13(\pi)^{-1}$

Simplificar la expresión :

$$13\left[\frac{a^{x+1}+ba^x}{a^{3+x}+b^3a^x}\right]$$

a) $\frac{\pi}{\pi+5}$ b) π c) $\frac{\pi}{\pi-1}$

d) $\frac{\pi}{\pi+2}$ e) $\frac{\pi}{2(\pi-1)}$

32. Si :

$$(a+b+c)^2=3(ab+bc+ac);\ a,b,c\ \varepsilon\ \boldsymbol{R}$$

Calcular :

$$A=\frac{bc}{ab+ac}-\frac{ac}{ab+bc}+\frac{ab}{ac+bc}$$

a) 2 b) 1/2 c) 3
d) 1 e) 0

33. Si : x + y + z = 6, calcular :

$$\frac{(x-1)^3+(y-2)^3+(z-3)^3}{(x-1)(y-2)(z-3)}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

34. Hallar el valor numérico de :

$$(a+b)[(a+b)^2-2ba+(a-b)^2]-2b^3$$

para : $a=\sqrt[3]{3}$; $b=2\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}+1$

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

35. Dado :

$$M^3=2(a+b)[(a+b)^2-2ab+(a-b)^2]+(a-b)$$

$$[(a+b)^2+4(a^2+b^2)-(a-b)^2]$$

Hallar el valor de "M".

a) 2a b) 2b c) -2ab

d) $8a^3$ e) $8b^3$

36. Dado el polinomio :

$$P_{(x)}=(x^2-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

obtener :

$$P(\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}})$$

a) 0 b) 217 c) 216
d) 215 e) 218

37. El valor numérico de :

$$\sqrt[3]{(x^3+3x)^2-(3x^2+1)^2}\ ;$$

para : x = 999 es:

a) 19 990 b) 991 000 c) 100 000
d) 999 000 e) 998 000

38. Si : $n=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}}$

Calcular : $R=n^3+3n+2$

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) 0
d) 2 e) 1

39. Si : $x=\sqrt[3]{a(a+2b)+b^2}-\sqrt[3]{a(a-2b)+b^2}$

Donde : $a^2-b^2=1$

Calcular : $\dfrac{(x-1)(x^2+x+4)}{ab-1}$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

40. Sabiendo que : $x+2=23\sqrt{2x}$, calcular el valor de :

$$E=\frac{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{2}}}{\sqrt[8]{2x}}$$

a) 3 b) 4 c) $\sqrt{8}$
d) $\sqrt{5}$ e) 5

41. Si : $ab(a+b)=1$

$$a^2b^2(a^2+b^2)=2$$

Hallar : $a^3b^3(a^3+b^3)$.

a) 3 b) 2,5 c) 5
d) 4 e) 4,5

42. Si : $b^3-1=0$; $b\neq 1$

Obtener : $\dfrac{1+b^5}{b^4}$.

a) 0 b) 1 c) -1
d) 2 e) -2

43. Si se cumple : $x^2+x+1=0$, hallar :

$$x^{31}+x^{-10}$$

a) 2 b) 1 c) -1
d) 3 e) -10

44. Sabiendo que :

$$(x+y)^2+1=(x+1)(y+1)$$

Calcular :

$$K=\frac{x^2(x-1)}{y^2(y-1)}$$

a) 2 b) 1 c) 1/2
d) -1 e)-1/2

45. Si : $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=0$, calcular :

$$R=\frac{(ab)^4+(ac)^4+(bc)^4}{a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)}$$

a) 2 b) 6 c) 18
d) 4 e) 3

46. Siendo : x, y, z ε R, tales que :

$$x^2+y^2+z^2=2(x+2y+3z)-14$$

Calcular :

$$M=\frac{(x+y+z)(xyz)}{x^3+y^3+z^3}$$

a) 3 b) 4 c) 1
d) -1 e) 2

47. Si : a+ b+ c = 0, hallar el valor de "x".

$$a^2\left(\frac{x}{bc}-1\right)+b^2\left(\frac{x}{ac}-1\right)+c^2\left(\frac{x}{ab}-1\right)=5abc(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})$$

a) a+ b+ c b) ab+ bc+ ca
c) $a^2+b^2+c^2$ d) 3abc
e) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

48. Si :

$$a+b+c=a^{-1}bc+b^{-1}ca+c^{-1}ab$$

Calcular :

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c}$$

a) 0 b) 1/3 c) 2/3
d) 1 e) -1

49. Si : $a^4+b^4=47\ \wedge\ ab=1$, reducir :

$$N=\sqrt{a^6+b^6+2}$$

a) 3 b) 14 c) 20
d) 10 e) 18

50. Hallar el valor de "E" :

$$E=(x+y+z)^3-3z.(x+y+z)(x+y)-(x+y)^3$$

a) x^3 b) y^3 c) $3z$
d) 0 e) z^3

51. Si : $H=\sqrt{(x-5)(x+6)(x-1)(x+2)+196}$

Hallar : $R=\sqrt{H+16{,}25}$

a) $2x+1$ b) $\frac{x+1}{2}$ c) $x+2$
d) $\frac{2x+1}{2}$ e) $2x-1$

52. Si : $(xy^{-1}+1)(yz^{-1}+1)(zx^{-1}+1)=8$

Calcular : $R=\sqrt{(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})}$

a) $\sqrt{2}$ b) 3 c) 2
d) 4 e) 1

53. Si : $P_{(x)}=a^x+b^x$, $a^6+b^6=1$, entonces :

$$\left[\frac{p_{(4)}-p_{(10)}}{p_{(2)}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

es equivalente a :

a) a^4b^4 b) ab c) $4a^2b^2$
d) $2a^4b^4$ e) a^2b^2

54. Evaluar :

$$E=4ab(3a^2+b^2)(a^2+3b^2)$$

Para :

$$a=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{2};\quad b=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{2}$$

a) 2 b) 3 c) -3
d) -4 e) 5

55. Calcular el V.N. de :

$$R=\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}-xy-xz-yz$$

Donde :

$x^3+y^3+z^3=4xyz$

$x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz+1$

a) 0 b) 1 c) -1
d) 3 e) -3

56. Siendo :

$a+b+c=m$

$a^2+b^2+c^2=3m^2$

$a^3+b^3+c^3=7m^3$

Calcular :

$$S=(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

a) $-13m^3$ b) $6m^3$ c) $2m^3$
d) $-m^3$ e) $7m^3$

57. Si : $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{a}{b}}^{\,-1}=7$

Calcular : $R=\sqrt[8]{\frac{a}{b}}-\sqrt[8]{\frac{a}{b}}^{\,-1}$

a) 2 b) 3 c) 5
d) 4 e) 1

58. Si se cumple :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n+\left(\frac{y}{x}\right)^n=62$$

Entonces el valor numérico de :

$$\sqrt[3]{\frac{x^n+y^n}{\sqrt{x^ny^n}}}$$

a) 4 b) 8 c) 16
d) 2 e) 1

59. Sabiendo que : $x^2=5x+1$
Obtener :

$$A=\frac{(x^3-140)\sqrt[3]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x^4+1}}$$

a) 1 b) 2 c) 1/2
d) 3 e) 1/3

60. Si :

$a+b+c=\sqrt{5}+\sqrt{2}$

$a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

$a^2+b^2+c^2=\sqrt{2}+\sqrt{5}$

Calcular : $a^3+b^3+c^3$.

a) $4+\sqrt{10}$ b) $7+2\sqrt{10}$
c) $5-\sqrt{10}$ d) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$
e) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$

Claves

01.	b
02.	c
03.	a
04.	b
05.	c
06.	c
07.	c
08.	e
09.	c
10.	b
11.	c
12.	d
13.	d
14.	c
15.	d
16.	d
17.	d
18.	a
19.	b
20.	d
21.	b
22.	a
23.	e
24.	a
25.	a
26.	d
27.	e
28.	b
29.	e
30.	b

31.	c
32.	b
33.	c
34.	c
35.	a
36.	d
37.	e
38.	c
39.	d
40.	d
41.	b
42.	c
43.	c
44.	b
45.	a
46.	c
47.	b
48.	a
49.	e
50.	e
51.	d
52.	b
53.	e
54.	e
55.	e
56.	a
57.	e
58.	d
59.	e
60.	b

Capítulo 4

DIVISIÓN ENTRE POLINOMIOS DIVISIBILIDAD ALGEBRAICA COCIENTES NOTABLES

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Es la operación que tiene por objetivo determinar un polinomio llamado cociente (q) y otro polinomio denominado resto o residuo (R), conociendo otros dos polinomios llamados dividendo (D) y divisor (d).

Esquema clásico :

$$\begin{array}{c|c} D & d \\ \hline R & q \end{array}$$

de donde : $\boxed{D \equiv dq + R}$ (Identidad de la División).

Propiedades :

Siendo el grado del dividendo mayor o igual que el grado del divisor, con respecto a una variable en particular, es decir : $[D]° \geq [d]°$.

Se cumple :

1. El grado del cociente es la diferencia entre el grado del dividendo y divisor.

$$\boxed{[q]^{º} = [D]^{º} - [d]^{º}}$$

2. El máximo grado del resto es igual al grado del divisor disminuido en uno.

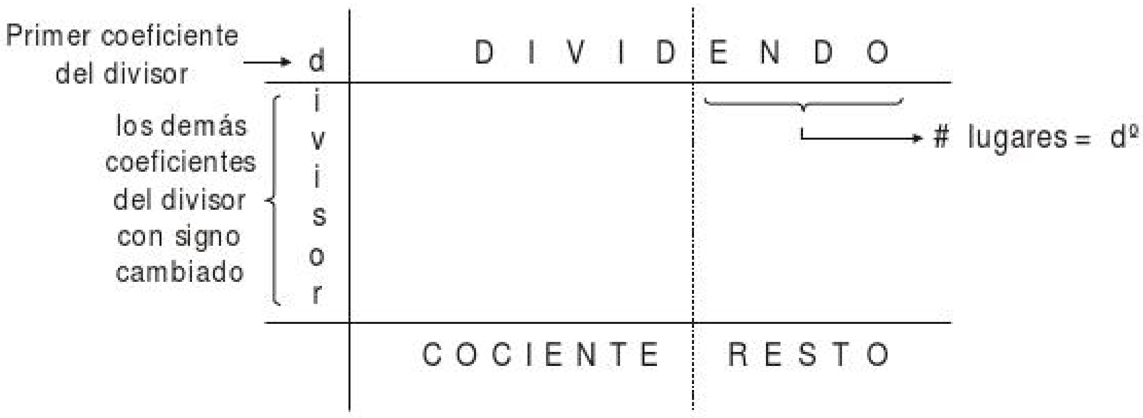
$$\boxed{[R]^{º}_{máx=} \ [d]^{º} - 1}$$

MÉTODOS DE DIVISIÓN

Para todos los métodos, el dividendo y divisor deben estar completos (si falta algún término se agrega "cero") y ordenados en forma decreciente.

I. *MÉTODO DE HORNER*

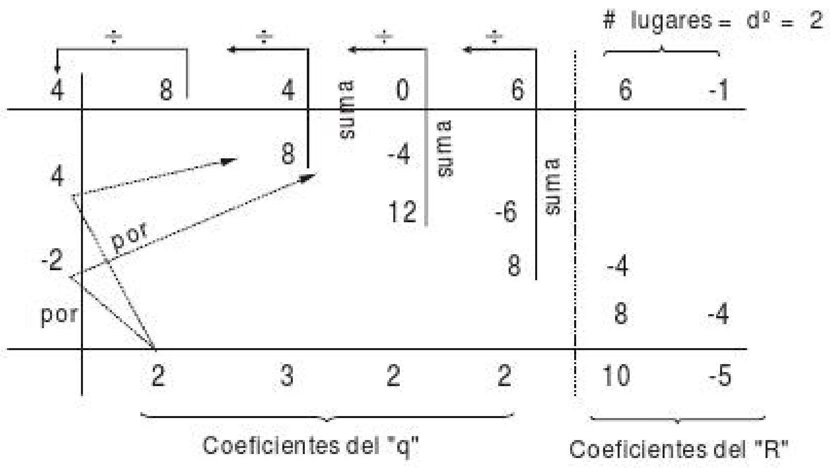
Para este método sólo se utilizan coeficientes, colocándolos en el siguiente esquema :



Ejemplo :

Dividir : $\dfrac{8x^5 + 4x^4 + 6x^2 + 6x - 1}{4x^2 - 4x + 2}$

Colocando según el esquema, los coeficientes del dividendo y divisor :



sólo se obtienen coeficientes. La variable se agrega de acuerdo al grado .

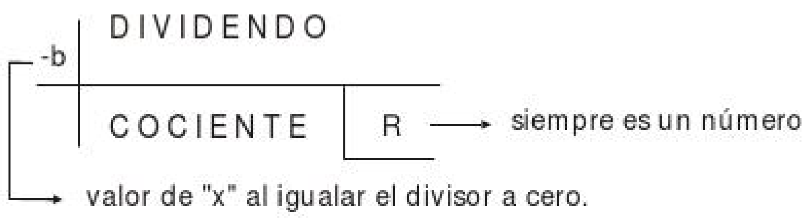
Así tenemos : q° = 5 - 2 = 3 ; Rºmáx = 2 - 1 = 1.

$$\Rightarrow \begin{cases} q = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 \\ R = 10x - 5 \end{cases}$$

II. *MÉTODO DE RUFFINI*

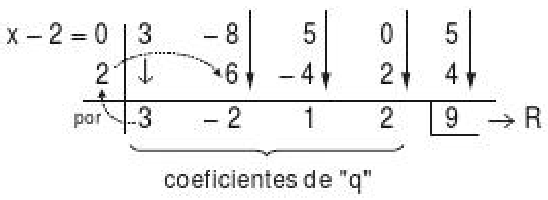
Al igual que en Horner, sólo utilizan coeficientes. Ruffini se aplica únicamente cuando el divisor es de la forma : x + b.

Esquema de Ruffini :



Ejemplo : $\dfrac{3x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 5}{x - 2}$

Colocando los coeficientes en el esquema de Ruffini :



Las variables de "q" se agregan de acuerdo al grado : q° = 4 - 1 = 3.

$$\Rightarrow \begin{cases} q = 3x^3 - 2x^2 + 2x + 2 \\ R = 9 \end{cases}$$

Observación : si el divisor es ax + b ($a \neq 1$), luego de realizar la división, los coeficientes del cociente se dividen entre "a".

Ej. : $\dfrac{3x^4+7x^3-3x^2+x+7}{3x-2}$

$$\begin{array}{c|ccccc}
3x-2=0 & 3 & 7 & -3 & 1 & 7 \\
\frac{2}{3} & \downarrow & 2 & 6 & 2 & 2 \\
\hline
 & 3 & 9 & 3 & 3 & \boxed{9} \\
\div 3 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & 1 & 3 & 1 & 1 &
\end{array}$$

$$q^{o} = 4-1 = 3 \Rightarrow \begin{cases} q = x^3+3x^2+x+1 \\ R = 9 \end{cases}$$

TEOREMA DEL RESTO

El resto de dividir el polinomio P(x) entre (x-a) es P(a).

Observación :

* Si el divisor no es de primer grado, se calcula alguna expresión según el caso y tal cual, se reemplaza en el dividendo.

Ejemplo :
Hallar el resto :

$$\frac{x^{50}+3x^{21}-7x+2}{x+1}$$

Por T. resto : $x+1=0 \rightarrow x=-1$

Reemplazando en el "D" : $R=(-1)^{50}+3(-1)^{21}-7(-1)+2$

$R = 1-3+7+2$

$R = 7$

Ejemplo :
Hallar el resto :

$$\frac{x^{20}+7x^5-6x^4+x^3+1}{x^2-1}$$

Por T. resto : $x^2-1=0 \rightarrow x^2=1$ (no se calcula "x").

Formando "x^2" en el dividendo : $(x^2)^{10}+7(x^2)^2x-6(x^2)^2+x^2.x+1$

Reemplazando :

$x^2=1 \Rightarrow R=(1)^{10}+7(1)^2x-6(1)^2+(1)x+1$

$R = 1+7x-6+x+1$

$R = 8x-4$

DIVISIBILIDAD ALGEBRAICA

Se dice que un polinomio es divisible entre otro, si el resto de dividirlos es cero; es decir :

Si en : $P(x) \div f(x) \rightarrow R = 0$

Entonces $P(x)$ es divisible entre $f(x)$.

Propiedades :

1. Si un polinomio es divisible entre otros polinomios por separado, entonces será divisible entre el producto de dichos polinomios, siempre que estos sean primos entre sí, (no deben tener ningún factor en común); es decir :

Si en : $P(x) \div f(x) \rightarrow R = 0$
$P(x) \div g(x) \rightarrow R = 0$

$\Rightarrow \quad P(x) \div f(x) \,.\, g(x) \rightarrow R = 0$

* $f(x)$ y $g(x)$ son primos entre sí.

2. Si un polinomio es divisible entre un producto de varios polinomios, entonces será divisible entre cada uno por separado; es decir :

Si en : $P(x) \div f(x) \,.\, g(x) \rightarrow R = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(x) \div f(x) \rightarrow R = 0 \\ P(x) \div g(x) \rightarrow R = 0 \end{cases}$$

COCIENTES NOTABLES (C.N.)

Se llama, así, a los cocientes exactos obtenidos de la división de binomios de la forma :

$$\boxed{\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}}$$

Condiciones :

$$\begin{cases} R = 0 \\ n \rightarrow \text{entero y positivo} \end{cases}$$

Propiedades :

1. En : $\dfrac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$, el número de términos del cociente será "n".

2. Si : $\dfrac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q}$ es un C.N., entonces se cumple que :

$$\boxed{\frac{m}{p} = \frac{n}{q} = \#\ \text{términos del cociente}}$$

FÓRMULAS DE LOS COCIENTES NOTABLES

1er. Caso : n $\rightarrow$ par o impar

$$\boxed{\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + ... + a^{n-1}}$$

2do. Caso : n → impar

$$\boxed{\frac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - ... + a^{n-1}}$$

3er. Caso : n → par

$$\boxed{\frac{x^n - a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - ... - a^{n-1}}$$

Observación : La forma $\frac{x^n + a^n}{x - a}$ no genera un C.N. pues $R \neq 0$.

TÉRMINO GENERAL(T_k)

Se llama así a un término cualquiera del C.N. se representa por T_k . La fórmula para obtener el término general en: $\frac{x^n - a^n}{x - a}$ es :

$$\boxed{T_k = x^{n-k}a^{k-1}}$$

donde : k → lugar de término.
x, a → términos del divisor (denominador).
n → exponentes que se repite en el dividendo.

Importante : para aplicar la fórmula, la división debe tener la forna de C.N.

Ej. Calcular el T_{17} en : $\frac{x^{120} - y^{180}}{x^2 - y^3}$

Solución :

$$\underbrace{\frac{x^{120} - y^{180}}{x^2 - y^3}}_{\text{no tiene forma}} \Rightarrow \underbrace{\frac{\left(x^2\right)^{60} - \left(y^3\right)^{60}}{x^2 - y^3}}_{\text{tiene forma de C.N.}}$$

$$T_{17} = (x^2)^{60-17}(y^3)^{17-1} \rightarrow T_{17} = x^{86}y^{48}$$

Observación : la misma fórmula puede aplicarse para los casos :

$\frac{x^n + a^n}{x + a}$ y $\frac{x^n - a^n}{x + a}$, pero colocando el factor $(-1)^{k-1}$

así tendremos : $\boxed{T_k = (-1)^{k-1}x^{n-k}a^{k-1}}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Sea : $Q_{(x)}$ el cociente y $R_{(x)}$ el residuo de dividir :

$$\frac{6x^4-7x^3-4x^2+10x-3}{3x^2+x-2}$$

Indicar : $Q_{(x)}+R_{(x)}$.

a) $2x^2+6x$ b) $2x^2$
c) $2x^2+3x+2$ d) x^2+6x+2
e) $2x^2+2$

02. Hallar el residuo de dividir :

$$\frac{12x^5-9x^3-x^2+x}{6x^3+3x^2+1}$$

a) -2x+ 1 b) x^2+2x+1 c) 2x+ 1
d) $-x^2+2x-1$
e) $-x^2+2x$

03. El residuo de dividir :

$$\frac{8x^5+4x^3+Ux^2+Nx+I}{2x^3+x^2+3}$$

es : $5x^2+11x+7$. Calcular : $\sqrt{U.N.I}$.

a) 20 b) 30 c) 40
d) 50 e) 60

04. Si la división :

$\dfrac{6x^4+16x^3+25x^2+Ax+B}{3x^2+2x+1}$ es exacta, entonces el valor de : N = A+ B, es :

a) 5 b) 9 c) 14
d) 19 e) 20

05. El residuo de dividir : $3x^3-4x^2+5x+6$ entre 3x + 2 es :

a) 0 b) 2 c) 4
d) 1 e) -1

06. Al efectuar la división :

$$\frac{3x^4+2\sqrt{2}x^3+4x^2+\sqrt{2}x-6}{3x-\sqrt{2}}$$

Indicar el producto de todos los coeficientes del cociente.

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 12

07. Calcular "n", para que el residuo de la división sea : 3n+ 2.

$$\frac{x^3-nx^2-nx-n^2}{x-n-2}$$

a) -2 b) -1 c) 1
d) 2 e) 3

08. Para que la siguiente ecuación :

$$x^4-5x^2+4x-m$$

sea divisible por : x+ 1, el valor de "m" debe ser :

a) -8 b) -4 c) -1
d) 1 e) 9

09. Dada la función polinomial :

$$P_{(x)}=x^3-10000x^2-10002x+9999$$

Calcule el valor de : $P_{(10001)}$.

a) -3 b) -2 c) -1
d) 0 e) 1

10. Calcular el residuo de dividir :

$$\frac{(x^2-3x-1)^4+2(x-3)^5+x}{x-4}$$

a) 88 b) 89 c) 87
d) 95 e) 98

11. Calcular : (A+ B-C), si la siguiente división:

$$\frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+27x^2+19x+5}{4x^3+3x+1}$$

es exacta.

a) 41 b) 21 c) 11
d) 10 e) 40

12. Señale la relación necesaria de "a", con "c", tal que la división :

$$\frac{2a^2x^5+4abx^4+2b^2x^3-a^3x^2+a^2x+2a^2b}{ax^2+bx-c}$$

presente un resto : $4a^2x+2c^2-a^2c$.

a) 3a = 2c b) 2a = 3c
c) a = c d) 3a = 2c
e) 3a = -2c

13. ¿Para qué valor de "m", la división :

$$\frac{5x^3 - m(x^2+x-1)}{5x^2+2x-4} \text{ es exacta?}$$

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) N.A.

14. Calcular el valor numérico de :

$P_{(x)} = x^5 + (2-2\sqrt{2})x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 5x - 3\sqrt{2}$

Para : $x = 2\sqrt{2}$.

a) $8\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}+7$ c) $7\sqrt{2}$
d) $13\sqrt{2}$ e) $9\sqrt{2}$

15. El resto obtenido en :

$$\frac{\sqrt{3}x^4 - (1-\sqrt{3})x^3 - 2\sqrt{3}(x^2+1) + A - 2x}{x+1-\sqrt{3}}$$

es 2. ¿Cuánto vale A?

a) 18 b) 6 c) 9
d) 8 e) -6

16. Calcular el resto de dividir :

$$\frac{(x+n)^7 - x^7 - n^7}{x+2n}$$

a) 0 b) $126n^7$ c) $3n^7$
d) $62n^7$ e) $128n^7$

17. Hallar el resto en :

$$\frac{(x^3-1)^{29} + x^{15} + x^5 + 1}{x^2+x+1}$$

a) x b) -x c) x+ 1
d) 1-x e) 0

18. Indicar el residuo obtenido al efectuar la división :

$$\frac{mx^{3m+2} + nx^{3n+1} + px^{3p}}{x^2+1+x}$$

a) (m - p)x + m - n b) mx - n + p
c) (n - m)x + p - m d) (m + p)x - n
e) (m+ 1)x + n - p

19. Si el resto de dividir :

$$\frac{6x^3+nx+1}{x^2+1} \text{ ; es : (-4x+ 1).}$$

Calcular : n^6 .

a) 5 b) 15 c) 16
d) 32 e) 64

20. Si el residuo de la división :

$$\frac{mx^8 + nx^6 - 3x^5 - 1}{x^3+1}$$

es $8x^2 - px - 5$.

Calcule : m + n + p

a) 0 b) 1 c) -1
d) 2 e) 3

21. Hallar la relación entre "b" y "c" para que :

$x^a - bx + c$; sea divisible entre $(x-1)^2$.

a) a = c - 1 b) b = c + 1
c) 2a = c - 1 d) 2a = c + 1
e) a = 2c - 1

22. Si en la división :

$$\frac{ax^{a-1} + (2a-1)x^{a-2} + (3a-2)x^{a-3} + ... + (a^2-a+1)}{ax-1}$$

el cuádruple del resto es igual a nueve veces la suma de coeficientes del cociente. Hallar "a".

a) 10 b) 9 c) 8
d) 6 e) 3

23. Calcular el resto de la siguiente división :

$$\frac{x^{7^{8^n}} + x^{7^{9^n}} + x^{7^{10^n}} + ... \text{ "n" sumandos}}{x^{7^{7^n}} + 1}$$

$n \varepsilon N / n \geq 2003$.

a) -n b) n^2 c) 0
d) 2003 e) $-n^2$

24. Calcular la suma de los valores de "a" que hacen al polinomio :

$P_{(x)} = x^n - ax^{n-1} + ax - 1$; $a \varepsilon \boldsymbol{Z}^+$ divisible por $(x-1)^2$.

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

25. Calcular el resto en :

$$\frac{[(x^2)^{n+2} - 2x^{2n+1}](x^3-2)^{2n} + x^{2n+1}}{x^2+x+1} ; n \varepsilon \boldsymbol{Z}^+$$

a) 0 b) 1 c) 1
d) x e) -x

26. Obtener el término independiente del cociente de :

$$\frac{x^{18}(x^3+1)-5x^{14}+3x^4-11}{x+1}$$

a) 10 b) 8 c) 4
d) 6 e) 2

27. Si se divide el resto de la siguiente división:

$$\frac{x^{7n}+x^{6n+3}+2x^{5n+1}+3x^{4n}-3}{x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1}$$

entre x^2+2 ; se obtendrá como resto :

a) x b) x + 1 c) 1
d) -1 e) 0

28. Calcular el valor de "n" para que :

$\left((x-1)^n(x^3+8)\right)^2.(x^2-8x+16)-29x^4(2-x)^4$
$\div(x^2-2x-2)$

presente un resto de 11 200.

a) 6 b) 5 c) 2
d) 3 e) 4

29. Calcular el residuo que se obtiene al dividir:

$$\frac{(x^9+2x^4+x)(x+2)}{(x^4-2)(x+2)}$$

a) 5x + 4 b) $5x^2+6x+8$
c) x^2+2x+6 d) $5x^2+14x+8$
e) $3x^2+12x+6$

30. Deteminar: a+ b+ c, de modo que :

$(x+1)^5+a(x+1)^3+bx+c$; es divisible por $(x-1)^3$.

a) 40/3 b) 70/3 c) 94/3
d) 184/3 e) 52

31. Si al dividir : $\frac{P_{(x)}}{x-2}$. El residuo es 8 y el cociente (x^2+1) , hallar : $P_{(4)}$.

a) 40 b) 42 c) 30
d) 32 e) 18

32. Si al dividir $P_{(x)}$ entre $(x^2-x)(x-3)$, se halla por resto (6x + 5), hallar el resto de dividir $P_{(x)}$ entre x - 3.

a) 20 b) 23 c) 2
d) 12 e) 18

33. El polinomio P(x) es divisible en forma separada entre (x-2), (x+ 4) y (x+ 1). Hallar el residuo que deja la división de P(x) entre (x^3+3x^2-6x-8) .

a) 2 b) -4 c) -1
d) -2 e) 0

34. Un polinomio $P_{(x)}$ de tercer grado es divisible por separado entre (x - 2); (x+ 1) y (2x+ 1). Si la suma de sus coeficientes es -30, hallar el cociente de dividir $P_{(x)}$ entre el producto (x-2)(x+ 1)(2x+ 1).

a) -4 b) x + 1 c) 5
d) -6 e) 6

35. Un polinomio es dividido en forma separada entre (x-4), (x+ 4) y (x-1); obteniéndose el mismo residuo 5. Hallar el residuo que se obtiene al dividir dicho polinomio entre $(x^3-x^2-16x+16)$.

a) 2 b) 5 c)10
d) 0 e) 4

36. Un polinomio de tercer grado cuya suma de coeficientes es -76, es dividido en forma separada entre (x+ 1), (x+ 3) y (x-3); obteniéndose el mismo residuo 4. Calcular su término independiente.

a) -31 b) -37 c) -41
d) 19 e) 21

37. Si A(x) es un polinomio de segundo grado, tal que al dividirlo entre (x-5) y (x+ 3) en forma separada deja residuo igual a 7. Calcular el residuo de $A(x)\div(x+1)$, si : A(x) ÷ (x-4) deja residuo -7.

a) -17 b) 15 c) 12
d) -10 e) -6

38. Al dividir un polinomio mónico $P_{(x)}$ de tercer grado por separado entre (x^2-2x+2) y (x + 1) da el mismo resto 8, hallar el resto de dividir : $\frac{P_{(x)}}{x-3}$.

a) 24 b) 12 c) 28
d) 15 e) 17

39. Se divide $P_{(x)}$ entre (x+ 1) y (x-1), los restos respectivos son 2 y 4. Hallar el resto de dividir dicho polinomio entre x^2-1 .

a) x + 2 b) x c) -2
d) x + 3 e) -x + 3

40. El polinomio : $(x-2)^{51}+(x-1)^{40}+7$.
No es divisible entre : x^2-3x+2 .
Indique su residuo.

a) 2x + 1 b) 2x - 1 c) 2x - 4
d) 2x + 4 e) 2x

41. Si al dividir : $P_{(x)}$ entre (x - b) da como resto "a" ; al dividir $P_{(x)}$ entre (x - a) da como resto "b". Hallar el resto que resulta de dividir :

$$P_{(x)} \div (x-a)(x-b) \qquad (a \neq b)$$

a) x + ab
b) -x + ab
c) -x - a + b
d) -x + a + b
e) -x + 2ab

42. Al dividir el trinomio : ax^2+bx+2 entre (x-1) y (5x-13) dio como restos -1 y 15, respectivamente.
Hallar el valor de : (a - b).

a) 13
b) 10
c) -10
d) -1
e) -13

43. Dado el polinomio $P_{(x)}$, si $P_{(x)}$ - 5 es divisible por (x + 5) y $P_{(x)}$ + 5 es divisible por (x - 5). ¿Cuál es el resto de dividir $P_{(x)}$ entre (x^2-25) ?

a) x
b) -x
c) x + 1
d) x - 1
e) -x - 1

44. Los restos de la división de un polinomio entero en "x", por los binomios x+ 1, x-1 y x-2 son, respectivamente 5, -1, -1. Hallar el resto de la división del polinomio por el producto : $(x^2-1)(x-2)$.

a) 0
b) 15
c) x^2+1
d) x + 3
e) x^2-3x+1

45. Al dividir un polinomio mónico de tercer grado entre (x-2) y (x-4) en forma separada se obtuvo el mismo residuo -8, si su término independiente es 16. Hallar su término cuadrático.

a) $3x^2$
b) $-x^2$
c) $-2x^2$
d) $4x^2$
e) $-3x^2$

46. Se tiene un polinomio de segundo grado que es divisible entre (x - 1). Se sabe además que su término independiente es -3 y que al dividirlo entre (x + 1) se obtuvo como resto 8. Hallar el resto que resulta de dividir el polinomio entre (x - 3).

a) 10
b) 22
c) 36
d) 48
e) 56

47. Los restos de las divisiones de un polinomio entero en "x" por los binomios (x+ 3), (x - 2), (x - 1) son 16, 11 y 4 respectivamente. Entonces el residuo de la división de dicho polinomio entre x^3-7x+6 será :

a) 1
b) 2
c) x^2+1
d) x^2+x+1
e) $2x^2+x+1$

48. Un polinomio $P_{(x)}$ de noveno grado, tiene raíz cúbica exacta, se anula para x = 2 es divisible entre (x + 2), el resto de dividirlo entre (x + 1) es 729, la suma de sus coeficientes es 27. Señala el término independiente de dicho polinomio.

a) 27
b) 501
c) 427
d) 512
e) 511

49. Calcular el resto de dividir un polinomio $P_{(x)}$ del sétimo grado entre (x + 2), si se anula para : x = 3, x = 2, x = 1 y es divisible entre (x^2+1) y (x + 5). Además el, resto de dividirlo entre (x + 1) es 960 y su término independiente es 60.

a) 710
b) 7200
c) 2300
d) 1221
e) N.A.

50. Al dividir un polinomio S(x) entre (x^3+1) se obtuvo como residuo 3x. Hallar el residuo que origina $S^2_{(x)}$ entre (x^2-x+1).

a) x + 4
b) 3x - 3
c) 3x + 3
d) 6x - 6
e) 9x - 9

51. Un polinomio $P_{(x)}$, al ser dividido entre (x^2+1), da como residuo (-x + 1). ¿Cuál será el residuo en?

$$\frac{[P_{(x)}]^7}{x^2+1}$$

a) x - 1
b) 4(x + 1)
c) 8(x + 1)
d) 8(x - 1)
e) 4(x - 1)

52. Se sabe que el polinomio $F_{(x)}$ es divisible por $(x^n - 1)$. Si se divide $F_{(x)}$ entre (x-1), se puede afirmar que :

a) Es exacta.
b) La suma de los coeficientes del cociente es cero.
c) La suma de los coeficientes del resto es cero.
d) a ó c.
e) Hay 2 correctas.

53. Se tiene un polinomio $P_{(x)}$ que, al dividirlo entre :

$$x^5-15x^4+85x^3-225x^2+274x-120,$$

se obtiene como resto : 3x - 1 y un cociente $Q_{(x)}$. Se pide calcular el resto de dividir $P_{(x)}$ entre (x - 4), sabiendo que al dividir $Q_{(x)}$ entre (x - 4) se obtuvo como resto 1.

a) 11
b) -10
c) -20
e) 20
e) -11

54. Al dividir $P_{(x)}$ entre (x + a) deja como resto 4bc. Al dividir $Q_{(x)}$ entre (x + a) deja como resto b^2c^2. Hallar el resto que se obtiene al dividir :

$\dfrac{P^2_{(x)}}{Q_{(x)}}$ entre (x + a). Se sabe además que :

$P^2_{(x)}$ es divisible entre $Q_{(x)}$.

a) 4bc b) b^2c^2 c) 2bc
d) 16 e) 4

55. El polinomio : $x^3 - 2x^2 - 15x + x^2\sqrt{a} - 2x\sqrt{a} - 15\sqrt{a}$ es divisible entre $(x + \sqrt{a})$ y (x + 3), entonces también será divisible entre :

a) x + a b) x - 3 c) x - 5
d) x + 5 e) x - 4

56. Siendo : $P_{(x)} = x^4 - x^3 + nx - n$ divisible separadamente entre los binomios (x-a), (x-b), (x-c), (x-d), señale el residuo de dividir $P_{(x)}$ entre :

$$(x - a^{-1} - b^{-1} - c^{-1} - d^{-1})$$

a) 2 b) 0 c) 1
d) -1 e) -2

57. Encontrar el término central de un polinomio de la forma :
$nx + (n-1)x^2 + (n-2)x^3 + ... + 2x^{n-1} + x^n$, sabiendo que el resto que resulta de dividirlo entre (x - 1) es 153.

a) $10x^{10}$ b) $9x^9$ c) $12x^{12}$
d) $13x^{13}$ e) $7x^7$

58. Si el cociente notable : $\dfrac{x^{30} - x^m}{x^n - y^2}$ tiene 10 términos, hallar el valor de (m+ n).

a) 23 b) 21 c) 25
d) 35 e) 50

59. Siendo que el C.N.

$$\frac{a^{m-2} - b^{n+5}}{a^3 - b^2}$$

tiene 9 términos en su desarrollo, calcular :

$$\sqrt{m - n}$$

a) 1 b) 3 c) 4
d) 5 e) 7

60. Si "N" es el número de términos que genera el desarrollo del cociente notable :

$$\frac{x^{3a-1} - y^{5a+5}}{x^5 - y^{10}}$$

Indicar el valor de : "a + N".

a) 7 b) 9 c) 11
d) 13 e) 28

61. Hallar el número de términos del desarrollo del C.N. :

$$\frac{x^{5n+3} - a^{5(n+6)}}{x^{n-1} - a^{n+2}}$$

a) 3 b) 5 c) 6
d) 7 e) 9

62. Si la siguiente división :

$$\frac{x^{m^2+81} - y^{2m}}{x^{27} - y^3}$$

genera un cociente notable. Hallar el número de términos de dicho cociente notable.

a) 6 b) 12 c) 15
d) 13 e) 27

63. Desarrollar los siguientes C.N. :

a) $\dfrac{x^{15} - y^{20}}{x^3 - y^4} =$

b) $\dfrac{y^{20} + m^{25}}{y^4 + m^5} =$

c) $\dfrac{a^{40} - b^{28}}{a^{10} + b^7} =$

d) $\dfrac{x^{21} - 1}{x^3 - 1} =$

64. Indicar el C.N. que origina a :

a) $m^{72} + m^{54} + m^{36} + m^{18} + 1 =$

b) $y^8 - x^8y^6 + x^{16}y^4 - x^{24}y^2 + x^{32} =$

c) $x^{35} - x^{30} + x^{25} - x^{20} + x^{15} - x^{10} + x^5 - 1 =$

65. Hallar el vigésimo tercer término del desarrollo del cociente :

$$\frac{x^{120} - y^{96}}{x^5 - y^4}$$

Señalar la suma de exponentes.

a) 91 b) 93 c) 95
d) 97 e) 99

66. Evaluar el quinto término del C.N. obtenido a partir de:

$\dfrac{x^{36}-y^{12}}{x^{6}-y^{2}}$, para : $x=2^{-8}$ e $y=2^{6}$.

a) 2^{-4} b) 2^{-10} c) 2^{4}
d) 2^{8} e) 1

67. Calcular "mn", si el T_{24} del C.N. :

$\dfrac{x^{325m}-y^{260n}}{x^{5m}-y^{4n}}$ es $x^{345}y^{984}$.

a) 6 b) 12 c) 15
d) 18 e) 24

68. Si : m - n = 27; y $\dfrac{x^{m}-y^{n}}{x^{7}-y^{4}}$ genera un C.N.

Hallar el grado absoluto del sexto término del desarrollo.

a) 38 b) 39 c) 40
d) 41 e) 42

69. Determinar el lugar del término que presenta como grado absoluto a 88 en el desarrollo de :

$$P(x;y)=\frac{x^{125}-y^{75}}{x^{5}-y^{3}}$$

a) 14 b) 13 c) 15
d) 17 e) 16

70. Dado el cociente notable : $\dfrac{x^{120}-y^{40}}{x^{3}-y}$

Sabiendo que el $T_{P}=x^{90}y^{m}$. Hallar : "m.p".

a) 72 b) 110 c) 132
d) 56 e) 90

71. Hallar el término central del desarrollo del siguiente cociente notable :

$$\frac{x^{6k-3}-y^{8k+3}}{x^{3}-y^{5}}$$

a) $x^{9}y^{15}$ b) $x^{3}y^{5}$ c) xy
d) $x^{5}y^{9}$ e) $x^{12}y^{10}$

72. Si : A(x; y) es el término central del desarrollo del C.N.:

$$\frac{(3x+2y)^{15}-y^{15}}{3x+y}$$

Indicar el valor de A(1; -2).

a) -128 b) -3^{7} c) -64
d) 3^{7} e) 128

73. El término central del desarrollo del cociente notable :

$\dfrac{z^{n}-w^{m}}{z^{2}-w^{5}}$ es $z^{q}w^{90}$.

Calcular el valor de "n - q".

a) 24 b) 72 c) 94
d) 38 e) 111

74. Si el término central del C.N. :

$\dfrac{x^{5n}-y^{2n}}{x^{5}-y^{2}}$ es $x^{\frac{25m}{2}}.y^{20}$

Hallar : $(m+n)^{1/2}$.

a) 4 b) 2 c) 3
d) 1 e) 5

75. Qué lugar ocupa el término independiente en el desarrollo del C.N. :

$$Q(x)=\frac{x^{27}-x^{-9}}{x^{3}-x^{-1}}$$

a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) No tiene

76. Indicar el lugar que ocupa el término independiente del desarrollo del C.N. :

$$\frac{x^{27}-x^{-x}}{x^{3}-x^{-5}}$$

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

77. Calcular "m" para que el término independiente del C.N. :

$\dfrac{x^{24}-m^{6}x^{-6}}{x^{4}-mx^{-1}}$ sea 81.

a) 6 b) 5 c) 4
d) 3 e) 9

78. Hallar el lugar que ocupa el término independiente en el desarrollo de :

$$\frac{x^{6}-x^{-4}}{\sqrt[6]{x}-\sqrt[9]{x}^{-1}}$$

a) 17 b) 18 c) 19
d) 22 e) 21

79. Si el término de lugar 4 contado desde el extremo final del desarrollo del C.N. :

$\dfrac{x^{5p}-y^{2p}}{x^{5}-y^{2}}$ tiene grado absoluto 37.

Indicar el número de términos del desarrollo del C.N.

a) 10 b) 12 c) 14
d) 15 e) 18

80. Si : $x^{66}y^{7+5r}$ es el séptimo término del desarrollo del C.N. :

$$\frac{x^p - y^q}{x^{11} - y^r}$$

Indicar el término de lugar 5 contado a partir del extremo final.

a) $x^{55}y^{49}$ b) $x^{66}y^{42}$ c) $x^{55}y^{35}$
d) $x^{44}y^{56}$ e) x^5y^{66}

81. Si el C.N. : $\dfrac{x^8 - 1}{x^m - 1}$ tiene 4 términos en su desarrollo.

Calcular : $E = m^9 + m^8 + m^7 + ... + m + 1$ ·

a) $2^{10} - 1$ b) $2^{10} + 1$ c) $2^9 - 1$
d) $2^{11} + 1$ e) $2^{11} - 1$

82. Si :

$$E(x) = \frac{x^{20} + x^{18} + ... + x^2 + 1}{x^{10} + x^9 + x^8 + ... + x + 1} - \frac{x^{11} - 1}{x + 1}$$

Hallar : E(-1/3).

a) -1/9 b) -1/3 c) 1
d) 3 e) 9

83. Simplificar :

$$E = \frac{x^{78} + x^{76} + x^{74} + ... + x^2 + 1}{x^{38} + x^{36} + x^{34} + ... + x^2 + 1} - x^{40}$$

a) 0 b) 1 c) x^{36}
c) x^{41} e) x^{42}

84. Reducir :

$$E = \frac{x^{22} + x^{20} + x^{18} + ... + x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} - x^{18}$$

a) $x^6 - x^3 + 1$ b) $x^{12} - x^6 + 1$
c) $x^6 + x^3 + 1$ d) $x^{10} + x^5 + 1$
e) $x^{12} + x^6 + 1$

85. Si :

$$F(x) = \left(\frac{x^{12} - x^{10} + x^8 - x^6 + ... + 1)}{x^{24} + x^{20} + x^{16} + ... + 1}\right)^{-1}$$

Hallar : $F\left(\sqrt{2}\right)$.

a) 257 b) 511 c) 25
d) 127 e) 510

Claves

01.	b	31.	b	61.	e
02.	c	32.	b	62.	a
03.	c	33.	e	63.	-
04.	d	34.	c	64.	-
05.	a	35.	b	65.	b
06.	b	36.	c	66.	e
07.	a	37.	a	67.	d
08.	a	38.	c	68.	d
09.	b	39.	d	69.	d
10.	c	40.	d	70.	e
11.	c	41.	d	71.	a
12.	c	42.	a	72.	a
13.	d	43.	b	73.	d
14.	c	44.	e	74.	e
15.	d	45.	e	75.	b
16.	b	46.	d	76.	b
17.	d	47.	e	77.	d
18.	c	48.	d	78.	d
19.	e	49.	b	79.	d
20.	b	50.	e	80.	d
21.	b	51.	c	81.	a
22.	b	52.	d	82.	d
23.	a	53.	a	83.	b
24.	b	54.	d	84.	e
25.	a	55.	c	85.	d
26.	e	56.	b		
27.	c	57.	b		
28.	c	58.	a		
29.	d	59.	c		
30.	e	60.	e		

Capítulo 5

FACTORIZACIÓN

Factorizar un polinomio es descomponerlo en dos o más polinomios llamados factores, de tal modo que, al multiplicarlos, se obtenga el polinomio original.

Ejemplo :

$$\underbrace{x^2-y^2}_{\text{Antes de factorizar}}=\overbrace{(x+y)(x-y)}^{\text{ya factorizado}}$$

factores

Puede notarse que si multiplicamos (x+ y)(x-y) se obtiene x^2-y^2 que viene a ser el polinomio original (la factorización y la multiplicación son procesos inversos).

Factor Primo

Es aquel polinomio que no se puede descomponer en otros polinomios.

Ejemplo :

$x^2-y^2 \to$ no es primo (se puede descomponer).

$x^2+y^2 \to$ es primo (no se puede descomponer).

Propiedades :

1. El número máximo de factores primos que tiene un polinomio está dado por su grado. Así por ejemplo :

   $x^3-6x^2+12x-6$ a los más tiene 3 factores primos.

2. Los polinomios lineales (primer grado) necesariamente son primos.

3. Sólo se pueden factorizar los polinomios no primos.

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

I. ***Método del Factor Común***
Se aplica cuando en todos los términos del polinomio se repite el mismo factor, el que se denomina factor común. Para factorizar, se extrae a cada término del polimonio el factor común, (si éste tuviese diferentes exponentes, se elige el de menor exponente).

Ejemplo :

1. ***Factorizar : xy + xz + xw.***

   Solución :

$$\underbrace{xy+xz+xw}_{\text{"x" factor común}} \xrightarrow{\text{se extrae "x"}} \underbrace{x(y+z+w)}_{\substack{\text{polinomio}\\\text{factorizado}}}$$

2. ***Factorizar*** : $xy^4+y^7z+y^3w$

   Solución :

$$\underbrace{xy^4+y^7z+y^3w}$$

$y^3 \longrightarrow$ menor exponente

factor común

se extrae "y^3"

tendremos :

$$\underbrace{y^3(xy+y^4z+w)}_{\text{polinomio factorizado}}$$

3. ***Factorizar*** : $a^2+ab+ac+bc$

   Sol. agrupando :

$$a^2+ab+ac+bc$$

$$\underbrace{a(a+b)+c(b+a)}_{\text{factor común : a + b}}$$

se extrae (a+ b)

tendremos :

$$\underbrace{(a+b)(a+c)}_{\text{polinomio factorizado}}$$

II. ***Método de las Identidades***

En este caso, se utilizan las identidades algebraicas (Productos Notales); pero en forma inversa, es decir teniendo el producto se calculan los factores que le dieron origen.

Se puede utilizar cualquier Producto Notable estudiado; pero los que se utilizan con más frecuencia los recordamos en el siguiente cuadro :

Producto Notable		***Polinomio Factorizado***
Diferencia de Cuadrados :	$a^2-b^2 \rightarrow$	$(a+b)(a-b)$
Trinomio Cuadrado Perfecto : (TCP)	$a^2 \pm 2ab+b^2 \rightarrow$	$(a \pm b)^2$
Suma o Diferencia de Cubos :	$a^3 \pm b^3 \rightarrow$	$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Ejemplo :

1. ***Factorizar*** : $\boldsymbol{x^4-y^2}$

Solución :

$$(x^2)^2-y^2 \rightarrow \underbrace{(x^2+y)(x^2-y)}_{\text{polinomio factorizado}}$$

2. ***Factorizar*** : $\boldsymbol{x^2+10x+25}$

Solución :

$$x^2+2(x)(5)+5^2 \rightarrow \underbrace{(x+5)^2}_{\substack{\text{polinomio}\\ \text{factorizado}}}$$

3. ***Factorizar*** : $\boldsymbol{a^3+27}$

Solución :

$$a^3+3^3 \rightarrow \underbrace{(a+3)(a^2-3a+9)}_{\text{polinomio factorizado}}$$

III. ***Método de las Aspas***

a) ***Aspa Simple*** :

Se aplica a trinomios, obteniéndose 2 factores binomios.

Regla : se descomponen dos de los términos, en dos factores, luego se calcula la suma del producto en aspa, tal que sea igual al término no descompuesto del trinomio.

Ej. Factorizar : $\boldsymbol{x^2+10x+9}$

Solución :

$$x^2+10x+9 \Rightarrow (x+9)(x+1)$$

$$\begin{array}{ccccc} x & & 9 & \rightarrow & 9x \\ x & & 1 & \rightarrow & x \\ \hline & & & & 10x \end{array}$$

b) ***Aspa Doble*** :

Se aplica a polinomios de la forma :

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$

se obtienen dos factores trinomios.

Regla :

* Se descomponen en dos factores :
Ax^2; Cy^2; F

* Mediante tres aspas, se comprueban:
Bxy, Dx, Ey.

Ej. Factorizar :

$\boldsymbol{10x^2+xy-3y^2-16x-14y-8}$

Solución :

$$10x^2+xy-3y^2-16x-14y-8$$

$$\begin{array}{ccccc} 5x & & 3y & & 2 \\ & 1 & & 3 \quad 2 & \\ 2x & & -y & & -4 \end{array}$$

Comprobaciones :

Aspa 1 -5xy + 6xy = xy

Aspa 2 -12y - 2y = -14y

Aspa 3 4x - 20x = -16x

luego, tendremos : (5x+ 3y+ 2)(2x-y-4)

c) ***Aspa Doble Especial***

Generalmente, se aplica a polinomios de cuarto grado de la forma :

$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$

Se obtienen dos factores trinomios de segundo grado.

Regla :

* Se descomponen : Ax^4 y E, luego se calcula la suma del producto en aspa.
* La suma obtenida se resta de Cx^2.
* La diferencia que resulta se descompone en dos factores para comprobarlos con : Bx^3 y Dx.

Ejemplo :

Factorizar : $\boldsymbol{x^4+5x^3+9x^2+14x+6}$

Solución : $x^4+5x^3+9x^2+14x+6$

x^2	$4x$	3
x^2	x	2

Comprobación :

Aspa 1 $\quad 2x^2+3x^2 \rightarrow 5x^2$

que se resta de $9x^2$, obteniéndose $4x^2$.

Aspa 2 $\quad x^2.4x+x^2.x=5x^3$

Aspa 3 $\quad 4x\,.\,2+x\,.\,3=11x$

$\Rightarrow (x^2+4x+3)(x^2+x+2)$

IV. ***Método de los Divisores Binomios o Evaluación Binómica***

Se aplica a polinomios de cualquier grado, generalmente con una sola variable, siempre que tengan por lo menos un factor lineal (primer grado).

"Ceros" de un Polinomio

Son los valores de la variable que anulan el polinomio.

Para obtener los posibles "ceros" de un polinomio, tendremos :

Caso ***A*** : coeficiente principal = 1

$\Rightarrow$ posibles ceros :

$\boxed{\text{divisores del término independiente}}$

Caso ***B*** : coeficiente principal $\neq$ 1

$\Rightarrow$ posibles ceros :

$$\boxed{\dfrac{\text{divisores T. independiente}}{\text{divisores coeficiente principal}}}$$

Regla para factorizar :

a) Se calcula los posibles ceros y se comprueba si alguno anula al polinomio, por ejemplo :

Si se anula para :

$x=2 \rightarrow (x-2)$ es factor
$x=-3 \rightarrow (x+3)$ es factor
$x=4/5 \rightarrow (5x-4)$ es factor

b) Al polinomio dado, se le divide entre el factor o factores binomios obtenidos en el primer paso, el cociente de esta división es el otro factor del polinomio.

Ejemplos :

1. ***Factorizar*** : $\boldsymbol{x^3-6x^2+12x-7}$

Solución :

* Posibles ceros $\rightarrow$ (coeficiente principal= 1).

$\underbrace{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6}_{\text{divisores de 6}}$

* Se comprueba que se anula para: x = 1
  $\Rightarrow$ (x-1) es factor.
* Se divide por Ruffini al polinomio entre (x-1) :

x-1 = 0	1	-6	12	-7
1	↓	1	-5	7
	1	-5	7	$\boxed{0}$

$\underbrace{x^2-5x+7}$ factor faltante

* Finalmente tenemos :

$(x-1)(x^2-5x+7)$

2. ***Factorizar :*** $\boldsymbol{6x^3+7x^2-6x+1}$

* Posibles ceros (coeficiente principal $\neq$ de 1) :

$\underbrace{\pm1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{6}}_{\left(\frac{\text{Divisores de "1"}}{\text{Divisores de "6"}}\right)}$

* Se comprueba que se anula para: 1/3.
* Se divide por Ruffini entre : 3x - 1.
* Finalmente, tenemos :

	6	7	-6	1
$\frac{1}{3}$	$\downarrow$	2	3	-1
	6	9	-3	0
$\div 3$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
	2	3	-1	

$$\underbrace{\quad 2 \quad 3 \quad -1 \quad}_{2x^2+3x-1} \quad \text{(factor faltante)}$$

tendremos : $(3x-1)(2x^2+3x-1)$.

IV. *Método de los Artificios*

En este caso, no existen reglas fijas. ***Se aplica cuando las reglas anteriores no son fáciles de aplicar***; pero se puede recomendar lo siguiente :

a) Si dos o más términos se repiten constantemente, se sugiere hacer cambio de variable.
Ejemplo :

Factorizar :

$$\boldsymbol{(a+b+c-2)^2+(a+b+c-1)^2}$$
$$\boldsymbol{-5(a+b+c+1)}$$

Solución :

Hacemos :

$a+b+c = x$ se elige la letra que se desee menos : a, b, c

reemplazando :

$$(x-2)^2+(x-1)^2-5(x+1)$$

$$x^2-4x+\cancel{4}+x^2-2x+\cancel{1}-5x-\cancel{5}$$

$$2x^2-11x \to x(2x-11)$$

como : $x = a+b+c \Rightarrow$

$$(a+b+c)[\,2(a+b+c)-11\,]$$

b) Si aparecen exponentes pares trataremos de formar TCP.
Ejemplo :

Factorizar : $\boldsymbol{x^4+4b^4c^8}$

Solución :

Tenemos : $(x^2)^2+(2b^2c^4)^2$

para formar TCP, necesitamos :

$2(x^2)(2b^2c^4) \to 4x^2b^2c^4$

Artificio $\to$ Sumamos y restamos :

$4x^2b^2c^4$

$$\Rightarrow \underbrace{x^4+4b^4c^8+4x^2b^2c^4}_{\text{TCP}}-4x^2b^2c^4$$

$$(x^2+2b^2c^4)^2-(2xbc^2)^2 \to$$

$$\underbrace{(x^2+2b^2c^4+2xbc^2)(x^2+2b^2c^4-2xbc^2)}_{\text{ya factorizado}}$$

c) Si aparecen exponentes impares, procuramos formar suma o diferencia de cubos.
Ejemplo :

Factorizar : $\boldsymbol{x^5+x+1}$

Solución :

* Como hay exponentes impares, buscamos suma o diferencia de cubos.
* Si a "x^5" le factorizan "x^2", aparece "x^3".

Artificio : sumamos y restamos x^2.

$$\Rightarrow \underbrace{x^5}+\underbrace{x+1+x^2}-\underbrace{x^2}$$

$$x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)$$

$$x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1) \Rightarrow$$

$$(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Indicar el número de factores primos de :

$$P(x;y) = x^5y^3 - x^2y^7$$

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

02. Señalar un factor primo, al factorizar :

$$F(x;y) = x^3y + x^2y^2 - x^2 - xy$$

a) y b) xy - 1 c) x^2
d) x - y e) xy

03. Indicar un término de un factor primo de :

$$R(x;y) = x^6 + x^2y^2 + y^4 + xy^3 - x^3y^3$$

a) xy^2 b) $-x^3y$ c) y^4
d) $-x^2y$ e) $-y^3$

04. Factorizar :

$$F(x;y) = x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 + x^2 + 2xy + y^2$$

El factor primo que más se repite es :

a) xy + 1 b) xy - 1 c) $(x+y)^2$
d) x + y e) x - y

05. Factorizar :

$$F(x;y) = (x^2 - y^2)^2 - (y^2 - 1)^2$$

Un factor primo es :

a) x + y b) x - y c) x + 1
d) $x^2 + y$ e) y - 1

06. Factorizar :

$$F(x;y) = (1 - xy)^2 - (x+y)^2 + 4xy$$

Un factor primo es :

a) x + y b) x - y c) 2x + y
d) x - 2y e) 1 - x

07. Factorizar :

$$F(x) = (2x^2 - 3x)^2 - 14(2x^2 - 3x) + 45$$

Un factor primo es :

a) 2x - 1 b) 2x - 3 c) 2x + 5
d) 2x + 1 e) 2x + 3

08. Si el polinomio :

$$F(x) = x^2 + (2m-1)x + (m-1)^2$$

Es factoriable mediane un aspa simple (en los enteros), además : $m \varepsilon Z \wedge m \neq 1$. Indicar un factor primo.

a) x + 5 b) x + 7 c) x + 3
d) x + 4 e) x - 1

09. Factorizar :

$$F(x;y) = x^2(x+y)^2 - 8xy^2(x+y) + 12y^4$$

La suma de sus factores primos es :

a) 2x + y b) 3x + y c) 3x + 3y
d) 4x + 2y e) 2x + 3y

10. Factorizar :

$$F(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

El término independiente de uno de sus factores primos es :

a) -1 b) -3 c) 6
d) -6 e) -2

11. Factorizar :

$$F(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

La suma de coeficientes de uno de sus factores primos es :

a) 1 b) 3 c) 5
d) 7 e) 9

12. Factorizar :

$$F(x) = 6x^3 - 19x^2 + 15x - 2$$

La suma de sus factores primos es :

a) 6x - 4 b) 8x - 4 c) 3x + 2
d) 3x + 7 e) 4x - 3

13. Factorizar :

$$P(x) = x^5 - 21x^3 + 16x^2 + 108x - 144$$

e indicar el factor primo repetido.

a) x - 4 b) x - 3 c) x + 3
d) x - 2 e) x + 1

14. Factorizar :

$$F(x) = x^2(x^2+3)^2 - (3x^2+1)^2$$

La suma de factores primos lineales es :

a) 4x + 1 b) 4x + 3 c) 2x
d) 2x + 3 e) 2x - 1

15. Indicar la suma de factores primos de :

$$2x^4 - 7x + 3(x^3 - x^2 - 1)$$

a) 5x + 6 b) 4x - 1 c) 3x - 2
d) 4x e) 5x

16. Dar la suma de los factores primos de :

$$x(x - 4)(2x - 11) + 12x - 48$$

a) $4x + 7$ b) $3x - 7$ c) $4x - 11$
d) $3x + 7$ e) $4x + 11$

17. Dar un factor primo de :

$$x^5 - ax^3 + bx^2 + abx^3 - a^2bx + ab^2$$

a) $x^2 + ab$ b) $x^3 - ax - b$ c) $x^3 + ax - b$
d) $x^2 - ab$ e) $x^3 + ax + b$

18. Dar un factor primo de :

$$a^3(1 + b) + b^3(1 + a) + ab(a + b)$$

a) $a + b$ b) $a^2 + ab + b^2$
c) $a + ab + b$ c) $a + a^2b^2 + b$
e) $a^2 + a^2b^2 + b^2$

19. Factorizar :

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 3$$

e indicar que la suma de los términos lineales de sus factores primos.

a) $6x$ b) $10x$ c) $8x$
d) $20x$ e) $12x$

20. Cuántos factores lineales tiene :

$$x^5 - 8x^4 + 18x^3 - 7x^2 + 2x - 24$$

a) 5 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

21. Sea :

$$R(x) = 5(x - 2)^2(x + 7)^3(x^2 + 3)^4(x - 6)$$

Indique el número de factores primos :

a) 4 b) 3 c) 2
d) 1 e) 11

22. Indique el número de factores primos lineales de :

$$P(x;y) = x^8y + 3x^7y + 2x^6y + 6x^5y$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 48

23. Indicar un factor primo de :

$$F(x;y) = x^3 + x^2 + x^2y + y^2 + 2xy$$

a) $x^2 + y$ b) $x^2 + y^2 + y$ c) $x + y^2$
d) $xy + x^2 + y^2$
e) $x^2 + x + y$

24. Factorizar :

$$F(a;b) = 2a^4b^3 - 15a^2b^3 - 27b^3$$

Indicar el factor primo de mayor grado.

a) b b) b^3 c) $2a^4 + 1$
d) $2a^2 + 3$ e) $a^2 + 1$

25. Factorizar :

$$F(x) = (x^2 - x)^3 - (x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x)$$

Indicar el valor numérico de un factor primo, para x = 2.

a) 4 b) 0 c) 1
d) -2 e) Hay dos correctas

26. Un factor de : $ax^2 + bx - a^2x - ab$ es :

a) $x - ab$ b) $ax + b$
c) $ab + x$ d) $abx + 1$
e) $bx + a$

27. Uno de los factores de $x^6 - x^2 - 8x - 16$ es:

a) $x^3 - 4$ b) $x^3 - 2x + 4$
c) $x^2 + 2x - 4$ d) $x^3 - x - 4$
e) $x^3 - x + 4$

28. Factorizar :

$$R(x;y) = x^4 + 3y^2(x^2 + y^2) + y^4$$

Indique la suma de factores primos.

a) $2(x^2 - 2y^2)$ b) $2(x^2 - y^2)$
c) $2(x^2 + y^2)$ d) $2(x^2 + 2y^2)$
e) $2(x^2 + xy + y^2)$

29. Factorizar :

$$P(m) = m^6 - 7m^3 - 8$$

Indicar el término lineal de uno de los factores primos cuadráticos.

a) $4m$ b) $-m$ c) $3m$
d) $8m$ e) $-4m$

30. Al factorizar un polinomio en el conjunto de los números enteros, mediante el procedimiento del aspa simple, se realiza lo siguiente :

$8x^4 + bx^2 - (2 + d)$

$$\begin{array}{ccc} 2x^2 & & 1 \\ & \times & \\ 4x^2 & & d \end{array}$$

Entonces un factor primo del polinomio es:

a) $2x - 1$ b) $2x + 2$ c) $2x + 5$
d) $2x + 3$ e) $2x + 4$

31. Al factorizar :

$$(x-5)(x-7)(x+6)(x+4)-504$$

uno de los factores lineales es :

a) $x - 5$ b) $x + 7$ c) $x + 6$
d) $x + 3$ e) $x - 2$

32. Factorizar :

$$(x^2+x-1)^2-34x(x+1)+179$$

Indique la suma de todos sus factores primos:

a) $2(2x+3)$ b) $3(x+2)$
c) $2(2x+1)$ d) $3(2x+1)$
e) $2(x+1)$

33. Indique un factor primo de :

$$A(x)=(12x+1)(6x+1)(4x+1)(3x+1)-5$$

a) $12x + 1$ b) $3x - 1$ c) $2x + 1$
d) $3x + 1$ e) $36x^2-15x+4$

34. Hallar el producto de los coeficientes del factor primo de mayor término independiente del polinomio.

$$P(x)=8x^3+28x^2-2x-7$$

a) 4 b) 5 c) 8
d) 12 e) 14

35. Si se suman algebraicamente, los coeficientes y los términos constantes de los tres factores binomios, en los que puede descomponerse el polinomio : $x^4+2x^3-76x^2+8x-320$, se obtiene :

a) 14 b) 9 c) 0
d) 22 e) 97

36. Factorizar :

$$P(x)=x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12$$

Indique el binomio que no es factor.

a) $x - 2$ b) $x + 2$ c) $x - 1$
d) $x + 4$ e) Todos son factores

37. Determinar el número de factores primos del siguiente polinomio :

$$P(x)\equiv x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

38. Indicar la suma de coeficientes de un factor primo de :

$$P(x)\equiv x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$$

a) 3 b) 11 c) 1
d) 7 e) 2

39. Hallar el número de términos de un factor primo en Q de :

$$F(n)=n^7+n^6+2n^4+n^3+n^2-1$$

a) 1 b) 2 c) 5
d) 4 e) 6

40. ¿En cuánto disminuye el número de factores primos de:

$$(3x-1)(x-3)(2x-5)(6x+1);$$

si le restamos 20?

a) En 2 b) En 1 c) En 4
d) En 3 e) No varía dicho número

41. Señale un factor primo de :

$$P(m;n)=m(m^2+mn-1)-n(n^2+mn-1)$$

a) $m + n$ b) $m - n$
d) $mn + 1$ d) m^2+mn+n^2
e) m^2+n^2+1

42. Un factor de :

$$2x^2+1-(4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4)$$

es :

a) $1-2xy-y^2$ b) x^2+y^2+1
c) $x^2-2xy+1$ d) $1+2xy+2y^2$
e) $2xy-2y^2-1$

43. Al factorizar :

$$K=25a^4-109a^2+36$$

uno de sus factores es :

a) $a + 3$ b) $5a - 3$ c) $a - 3$
d) $5a - 1$ e) $5a + 2$

44. Descomponer en factores :

$$x^3y+x^2y^2-x^2yz+yz^3-xyz^2+xz^3-y^2z^2-x^3z$$

a) $(x-z)(z-y)(x+y)(x+z)$
b) $(x-z)(x+z)(x+y)(y-z)$
c) $(x+z)(x+y)(y-x)(z-y)$
d) $(z-x)(y-z)(x-y)(x+z)$
e) N.A.

45. Descomponer en dos factores :

$$(x+y)^3+3xy(1-x-y)-1$$

a) $(x+y+1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1)$

b) $(x+y-1)(x^2+2xy+y^2-x-y+1)$

c) $(x+y-1)(x^2-xy+y^2+x+y+1)$

d) $(x-y-1)(x^2-2xy+y^2-x-y+3)$

e) $(x-y+1)(x^2-2xy+y^2+x+y-3)$

46. Factorizar :

$$(a-b)^2(c-d)^2+2ab(c-d)^2+2cd(a^2+b^2)$$

e indicar la suma de los factores :

a) $a^2+b^2+c^2+d^2$ b) a + 2b + c + 2d

c) $a+b^2+c+d$ d) $a^2-b^2+c^2-d^2$

e) $a^2-b+c-d$

47. Factorizar :

$$A(x;y;z)=(x-2y)^3+(y-3z)^3+(3z+y-x)^3$$

Indique el número de factores primos obtenidos.

a) 2 b) 4 c) 1
d) 3 e) 5

48. Factorizar :

$$R(x)=(x+1)^2(x^2+2x+9)+5(x+1)(x^2+2x+2)+1$$

Indicando un factor primo.

a) x + 11 b) x + 18 c) x + 7
d) x + 2 e) Hay 2 correctas

49. Factorizar :

$$x^2(x-1)+y(x+y+1)(x-y-1)+(y+1)^2(1-x)$$

Indique el número de factores primos.

a) 2 b) 1 c) 3
d) 4 e) 5

50. Factorizar el polinomio :
$P(x)=x^5+x^4+2x^2-1$; y dar como respuesta la suma de coeficientes del factor de grado 3.

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

51. Indique un divisor de :

$$R(x)=x^{10}-1+x^2(2x^4+1)$$

a) x^2-x-1 b) x^3-x^2+1

c) x^2-x+2 d) x^2+x+2

e) x^3+x^2+1

52. Indicar el valor numérico que forma uno de los factores primos de :

$x^5+(x^2+1)^2$; para : x = -1.

a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

53. Dar la suma de los coeficientes del factor primo de menor grado en :

$$(x^2+1)^7+2(x^2+1)+x^4$$

a) 71 b) 7 c) 8
d) 17 e) Más de una es correcta

54. Señale Ud. el término de mayor grado de un factor primo del polinomio :

$$P(x)=x^7-2x^5+3x^4-3x^2+3x-1$$

a) x b) x^3 c) x^4

d) x^5 e) x^6

55. Factorice en el campo de los números reales:

$$P(a)=32(a^2-5)^5-(a^2-9)^5-(a^2-1)^5$$

Señale el número de factores primos :

a) 10 b) 12 c) 8
d) 6 e) 7

56. Factorizar e indicar el número de factores primos racionales :

$$P(x)=x^{10}+2x^5-x^2+1$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

57. Señale la suma de coeficientes de un factor primo de :

$$F(x)=x^7+2x^5-2x^3+1$$

a) 8 b) 6 c) 5
d) 4 e) 3

58. El polinomio :

$$P(x)=(x-1)(x^2-2)(x^3-3)+2(2x^3-3x+3)$$

Luego de factorizarlo toma la forma :

$$x^n(x+c)^n(x^n+ax-a)$$

Calcular : a + n.

a) -4 b) -1 c) 4
d) 3 e) 5

59. Señale un factor de :

$$(x^4+3x^2+1)^2+(2x^2+3)^2$$

a) x^4+x^2+3 b) x^2+x+1
c) x^4+x^2+2 d) x^4+2x^2+2
e) x^2+2x+2

60. Proporcione uno de los factores primos de:

$$M(a;b;c)=abc(a^5+b^5+c^5)-$$
$$-(a^5b^5+b^5c^5+a^5c^5)-a^2b^2c^2+a^4b^4c^4$$

a) a^2-bc b) a^3-bc c) $bc-a^4$
d) a^3+bc e) a - bc

Claves

01.	b	31.	b
02.	b	32.	c
03.	b	33.	c
04.	d	34.	e
05.	c	35.	b
06.	e	36.	d
07.	e	37.	b
08.	d	38.	e
09.	d	39.	c
10.	e	40.	b
11.	b	41.	b
12.	b	42.	a
13.	d	43.	b
14.	c	44.	b
15.	c	45.	c
16.	b	46.	a
17.	a	47.	d
18.	c	48.	d
19.	b	49.	c
20.	d	50.	d
21.	a	51.	b
22.	c	52.	d
23.	e	53.	b
24.	d	54.	b
25.	e	55.	d
26.	b	56.	c
27.	d	57.	e
28.	d	58.	b
29.	b	59.	d
30.	a	60.	c

Capítulo 6

MCD Y MCM DE POLINOMIOS FRACCIONES ALGEBRAICAS

Regla para calcular el MCM y MCD de Polinomios :

1. Se factorizan los polinomios dados.
2. El MCD estará formado por la multiplicación de todos los factores primos comunes de los polinomios dados, considerados con su menor exponente.
3. El MCM está formado por la multiplicación de factores primos no comunes y comunes, a los polinomios dados, considerados con su mayor exponente.

Ejemplo :

Hallar el MCD y MCM de los polinomios:

$$P(x)=x^3+x^2-x-1 \wedge Q(x)=x^3-x^2-2x$$

Factorizando : $P(x)=(x+1)^2(x-1)$

" $Q(x)=x(x-2)(x+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} MCD[P(x);Q(x)]=x+1 \\ MCM[P(x);Q(x)]=(x+1)^2(x-1)x(x-2) \end{cases}$$

Propiedad :

Dados los polinomios A y B.

$$\boxed{MCD\,(A,B).MCM\,(A,B)\equiv A\times B}$$

FRACCIÓN ALGEBRAICA

Es toda expresión de la forma $\frac{A}{B}$ donde por lo menos "B" debe ser literal.

Ejemplo :

* Son fracciones algebraicas

$$\frac{x+1}{x-1},\ \frac{2}{x},\ \frac{x^3+1}{x^2}$$

pero :

$\frac{x}{7},\ \frac{2}{5}$ $\rightarrow$ no son fracciones algebraicas

Simplificación de Fracción Algebraica

Para poder simplificar, el numerador y denominador deben estar factorizados para luego cancelar los factores que presenten en común.

Ejemplo :

Simplificar : $\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-15}$

Resolución :

$$\frac{x^2-3^2}{x^2-2x-15}=\frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{(x-5)\cancel{(x+3)}}=\frac{x-3}{x-5}$$

$$\begin{matrix} x & -5 \\ x & 3 \end{matrix}$$

Operaciones con Fracciones

I. ***Adición y/o Sustracción :***
En este caso, es necesario dar común denominador (MCM de los denominadores), salvo que las fracciones sean homogéneas (denominadores iguales). Así tenemos :

A. ***Fracciones Homogéneas :***

Ejemplo :

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x}-\frac{C}{x}=\frac{A+B-C}{x}$$

B. ***Fracciones Heterogéneas :***

Ejemplo :

$$\frac{A}{m}-\frac{B}{n}+\frac{C}{p}=\frac{Anp-Bmp+Cmn}{mnp}$$

C. ***Regla Práctica (para 2 fracciones):***

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD\pm BC}{BD}$$

II. ***Multiplicación :***
En este caso, se multiplica numeradores entre sí, de igual manera los denominadores.

Ejemplo : $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}$

III. ***División de Fracciones :***
En este caso, se invierte la segunda fracción y luego se ejecuta como una multiplicación.

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{A\times D}{B\times C}$$

ó

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{AD}{BC}$$

Importante : generalmente es conveniente simplificar las fracciones antes, y después operar fracciones.

Transformación de Fracciones en Fracciones Parciales

Este es un proceso inverso a la adición o sustracción de fracciones. Es decir una fracción se transforma en la adición o sustracción de fracciones que le dieron origen, veamos :

Ejemplo :

* Efectuar :

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2x}{x^2-1}$$

* Transformar a fracciones parciales :

$$\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Hallar el MCD de los polinomios :

$M(x)=(x+6)^2(x-7)^3(x+9)^4$

$N(x)=(x+10)^3(x-7)^2(x+6)^3$

a) (x-7)(x+ 6) b) x + 9

c) x + 10 d) $(x-7)^2(x+6)^2$

e) (x+ 10)(x+ 9)(x+ 6)(x-7)

02. Indicar el MCM de los polinomios :

$P(x)=(x+3)^3(x+6)(x-1)^4$

$F(x)=(x-1)^2(x+3)^3$

a) (x-1)(x+ 3)(x+ 6)

b) $(x-1)^4(x+3)^3(x+6)$

c) $(x-1)^2(x+6)^2(x+3)$

d) $(x-1)^4(x+3)^3$

e) $(x-1)^2(x+3)^2(x+6)$

03. Hallar el MCD de los polinomios :

$P(x;y)=x^2+xy-6y^2$

$F(x;y)=x^2-xy-2y^2$

a) x + 2y b) x - 3y c) x - 2y
d) x + y e) x - y

04. El valor numérico del MCD de los polinomios :

$F(x)=x^3+x^2-x-1$

$P(x)=x^3-6x^2+11x-6$
para : x = 4, es :

a) 25 b) 1 c) 5
d) 3 e) 4

05. ¿Cuántos factores cuadráticos presenta el MCM de los polinomios?

$P(x)=x^3+2x^2-4x-8$

$Q(x)=x^3+5x^2+8x+4$

$R(x)=x^3+6x^2+12x+8$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

06. Calcular el MCD de dos polinomios, si el producto de ellos es $(a^2-1)^2$ y la división entre el MCD y el MCM es $(a-1)^2$.

a) a + 1 b) a - 1 c) $(a+1)^2$

d) $(a-1)^2$ e) 1

07. Luego de efectuar :

$$\frac{-1}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2+x}$$

el numerador obtenido, es :

a) x^2+3 b) x - 3 c) x + 3
d) 2x + 3 e) 2x - 3

08. Efectuar :

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}+\frac{4}{x^2-1}$$

Indicar el cubo del denominador.

a) $64x^3$ b) 64 c) x^3

d) $(x+1)^3$ e) $(x-1)^3$

09. La fracción $\frac{3x-2}{x^2-3x-4}$ equivale a :

$\frac{m}{x+1}+\frac{n}{x-4}$, entoces ; m - n es igual a :

a) -1 b) 1 c) 2
d) -2 e) -3

10. Efectuar :

$$\frac{x-1}{x}\cdot\frac{2x^2}{x^2-1}$$

Indicar la octava parte del numerador simplificado.

a) $0,25\,x^2$ b) 0,25x c) 0,125x
d) 0,5x e) 0,625x

11. Efectuar :

$$\frac{1}{a-\frac{a}{b}+b}\div\frac{b}{a^2b-a^2+ab^2}$$

a) a b) b c) ab

d) $\frac{a}{b}$ e) $\frac{b}{a}$

12. Al simplificar :

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\frac{(ab)^2}{a-b}\ \text{obtenemos (ma)(nb)}$$

Calcular : m^4+n^4 , si : m, n ε Z.

a) 17 b) 82 c) 2
d) 626 e) 257

13. Simplificar las fracciones :

$$\frac{x^2-4}{x^2+2x};\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}$$

e indicar la suma de los denominadores.

a) 2x - 2 b) 2x + 1 c) 2x - 1
d) 2x + 2 e) 2x + 1

14. Simplificando :

$$\frac{a-b}{\frac{a^2}{a+b}-\frac{b}{\frac{a}{b}+1}}\text{; obtenemos :}$$

a) a b) b c) ab

d) $\frac{a}{b}$ e) 1

15. Simplificando :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{x}{y}}}\text{; tenemos :}$$

a) x - y b) $\frac{1}{x}-y$ c) $1-\frac{y}{x}$

d) $1+\frac{x}{y}$ e) $1-\frac{x}{y}$

16. Efectuando : $\frac{1+n^{-1}}{1-n^{-2}}$

obtenemos en el numerador .

a) n^2+n b) n - 2 c) n - 1
d) n e) 1

17. Simplificar :

$$\frac{x^2+6x+8}{x^2-x+xn-n}\div\frac{x^2-4}{x^2+nx}$$

señalar un término en el denominador.

a) -7x b) -5x c) -8x
d) 11x e) -3x

18. Simplificar las fracciones :

$$\frac{x^4-y^4}{2x^3+2xy^2};\frac{ax+ay-x^2+y^2}{ax-x^2+xy}$$

e indicar la diferencia de los denominadores.

a) 3x b) 4x c) $-\frac{1}{2}x$

d) x e) 2x

19. Al descomponer $\frac{x^3}{x^2-1}$ obtenemos :

$$ax+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}$$

Calcular : $a(3b^2+5c^2)$.

a) 3 b) 7 c) 11
d) 14 e) 2

20. Si la fracción : $P(a;b)=\frac{ma^2+nab+24b^2}{2a^2+3ab+4b^2}$

es independiente de sus variables, entonces n^2-m^2 equivale a :

a) 210 b) 180 c) 120
d) 144 e) 100

21. Hallar el M.C.D. de los siguientes polinomios :

$A=2x^4-x^3-3x^2+3x-9$

$B=10x^3-9x^2+17x-6$

a) $3x^2+2x-1$ b) $2x^2-x+3$

c) $3x^2-x+3$ d) x^2-x+1

e) x^2+x+3

22. Si : P y Q son dos polinomios factorizables definidos por :

$P(x)=x^3+4x^2+ax+b$

$Q(x)=x^3+cx+d$

Tal que, el MCD (P, Q) = (x-1)(x+ 3), entonces la suma de coeficientes del polinomio MCM (P, Q), es :

a) 9 b) 8 c) 6
d) 4 e) 0

23. Efectuar :

$$\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}+\frac{x^2-4}{2x^2+5x+2}$$

a) $\frac{2x}{x-1}$ b) 2 c) x

d) 1 e) 0

24. Resolver :

$$f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{x^2-1}{2x^2+2}\right)$$

a) x - 1 b) x + 1 c) x
d) 1 e) 0

25. La fracción : $\frac{7x-1}{1-5x+6x^2}$; se obtuvo sumando las fracciones : $\frac{A}{1-3x}$; $\frac{B}{1-2x}$.
Calcular : (A.B).

a) 20 b) -20 c) 4
d) -5 e) -4

26. Sabiendo que : x + y + z = 1.
Calcular :

$$M=\frac{x^3+y^3+z^3-1}{xy+yz+xz-xyz}$$

a) 1 b) -1 c) -3
d) 3 e) 2

27. Conociendo que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, la expresión :

$$\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\frac{ab}{a+b}-\frac{cd}{c+d}$$

resulta :

a) 0 b) 1 c) -1
d) $\frac{ab}{cd}$ e) $\frac{ac}{bd}$

28. Si : ab + bc + ac = 0.
Calcular :

$$K=\frac{(ab)^3+(bc)^3-2(ac)^3}{3abc(a+b+c)}$$

a) ac b) ab c) bc
d) abc e) 2ac

29. Al realizar :

$$\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x-1}+\frac{x^3+bx^2+cx+a}{x-2}+\frac{x^3+cx^2+ax+b}{x-3}$$

se obtiene un polinomio de segundo grado. Indicar la suma de coeficientes de dicho polinomio.

a) 8,5 b) 9,5 c) 10,5
d) 11,5 e) 12,5

30. Efectuar :

$$R=\frac{(1+ab)(1+ac)}{(a-b)(c-a)}+\frac{(1+ab)(1+bc)}{(b-a)(c-b)}+\frac{(1+ac)(1+bc)}{(c-a)(b-c)}$$

a) 0 b) -1 c) 1
d) $\frac{abc}{a-b+c}$ e) $\frac{a+b-c}{a+b+c}$

31. La expresión simplificada de :

$$\frac{a^4+4b^4}{a^2+2ab+2b^2}\text{ es :}$$

a) a^2+2b^2+2ab b) a^2+b^2-2ab
c) $a^2-2ab+2b^2$ d) a^2+b^2+2ab
e) a^2+b^2+ab

32. Si :

$$\frac{A}{x+5}+\frac{Bx+C}{x(x+5)+1}=\frac{2(2x^2+11x)+13}{(x+5)[x(x+5)+1]}$$

Hallar : $(A+B)^C$.

a) 1 b) 64 c) 27
d) 9 e) 16

33. Si : a + b + c + d = 0.
Hallar :

$$S=\frac{abc+abd+acd+bcd}{a^3+b^3+c^3+d^3}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 1/3 e) 1/2

34. La expresión :

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{m}}}$$

equivale a :

a) $\frac{m+2}{m+1}$ b) $\frac{m+1}{m+2}$ c) $\frac{3m+1}{m+2}$
d) $\frac{2m+1}{3m+2}$ e) $\frac{3m+2}{2m+1}$

35. Para qué valor de "b" se cumple que :

$$\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}=1;\ y\neq 0$$

a) -a b) 0 c) 1
d) a e) 2

36. Efectuar :

$$Z=\frac{2-\dfrac{8xy}{4x^2+2xy+y^2}}{(\dfrac{8x^3+y^3}{8x^3-y^3})(1-\dfrac{2y}{2x+y})}$$

a) 2 b) 3 c) 1
d) 0 e) -1

37. Simplfiicar :

$$1-\cfrac{x^5-1}{x^3+\cfrac{x^2-1}{1+\cfrac{x^3-1}{x-\cfrac{x^4-1}{x-\cfrac{1}{x}}}}}$$

a) x^{-1} b) x^{-2} c) x^{-3}
d) x^{-4} e) x^{-5}

38. Si :

$$M=\left(\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)^{-1};\ N=\left(\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}\right)^{-1}$$

Entonces MN, es igual a :

a) $\dfrac{(a+b)}{(a-b)}$ b) $\dfrac{1}{(b^2-a^2)}$ c) $\dfrac{ba}{(a^2+b^2)}$
d) $\dfrac{(a^2-b^2)}{ab}$ e) $\dfrac{a+b}{b-a}$

39. Si :

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}$$

Calcular :

$$\frac{a^{33}+b^{33}}{c^{33}}+\frac{b^{33}+c^{33}}{a^{33}}+\frac{a^{33}+c^{33}}{b^{33}}$$

a) 1 b) -1 c) 2
d) -2 e) 3

40. A partir de la relación :

$$a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)=Mabc$$

Determinar el valor de "M" que hace que la fracción :

$$\frac{a(b+c)^2+b(a+c)^2+c(a+b)^2}{a(b-c)^2+b(a-c)^2+c(a-b)^2}$$

Tomar el valor de 11.

a) 6,5 b) 7,2 c) 0,3
d) 1,33 e) π

41. Si el MCD de los polinomios :

$P(x)=x^3+ax^2+18$

$Q(x)=x^3+bx+12$

es de segundo grado, encontrar la suma de los factores no comunes.

a) 2x + 1 b) 2x + 2 c) 2x + 3
d) 2x + 4 e) 2x + 5

42. Efectuar :

$$K=\frac{nx^2-1}{(x-y)(x-z)}+\frac{ny^2-1}{(y-x)(y-z)}+\frac{nz^2-1}{(z-y)(z-x)}$$

a) n^2 b) n c) $\dfrac{n}{2}$
d) $2n^2$ e) 2n

43. Sabiendo que :

$$A=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\ddots}}};$$

$$B=b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\ddots}}}.\ \text{Calcular : }\frac{A}{B}.$$

a) $\dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{b}{a}$ c) ab
d) $\dfrac{1}{ab}$ e) $\dfrac{a+b}{ab}$

44. Si : ax + by + cz + abcxyz = 0.
Calcular :

$$\frac{(ax+1)(by+1)(cz+1)}{(ax-1)(by-1)(cz-1)}$$

a) 0 b) 1 c) -1
d) abc e) $\dfrac{1}{abc}$

45. Si se cumple :

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=a+b+c$$

obtener E^2 a partir de :

$$E=\frac{ab+a+1}{b+1}+\frac{bc+b+1}{c+1}+\frac{ac+c+1}{a+1}$$

a) 3 b) 27 c) 1
d) 9 e) 81

46. Si :

$$x=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\ ;\ y=\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\ ;\ z=\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}$$

y además :

$$\frac{a^4+b^4}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^4+c^4}{(b^2+c^2)^2}+\frac{a^4+c^4}{(a^2+c^2)^2}=4$$

Calcule : $x^2+y^2+z^2$.

a) 3 b) 5 c) 7
d) 9 e) 12

47. Calcular el valor de :

$$E=\frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3}$$

sabiendo que :

$x=2^{16}-2^{15}-2^{14}$

$y=2^{14}-2^{15}-2^{16}$

$z=2^{15}-2^{14}-2^{16}$

a) 3 b) -3/2 c) -3/4
d) 3/4 e) 2

48. Si : a, b, c, son números diferentes y :

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b}+\frac{x}{x-c}+x-d$$

calcular :

$$M=\frac{a^2}{P(a)}+\frac{b^2}{P(b)}+\frac{c^2}{P(c)}$$

a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

49. Si : $\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}=4$

Calcular : $S=\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}$;

$x\neq y\neq z$.

a) 8 b) 16 c) 2
d) 4 e) 6

50. Sabiendo que :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$$

Calcular : $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$

a) 0 b) 1 c) -1
d) 2 e) -2

51. Si :

$a+b+c=1$

$a^3+b^3+c^3=4$

Hallar :

$$M=\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ac}+\frac{1}{c+ab}$$

a) 1 b) -2 c) 3
d) 4 e) -8

52. Si :

$$\frac{(a^2+b^2)}{ab}+\frac{(b^2+c^2)}{bc}+\frac{(a^2+c^2)}{ac}=-2$$

Calcular :

$$P=\frac{(a+b+c)^6-(a^6+b^6+c^6)}{(ab)^3+(bc)^3+(ac)^3}$$

a) 1 b) 2 c) 4
d) 8 e) 16

53. Simplificar :

$$M=\frac{1}{(p+q)^3}\left[\frac{1}{p^4}-\frac{1}{q^4}\right]+\frac{2}{(p+q)^4}\left[\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3}\right]+\frac{2}{(p+q)^5}\left[\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right]$$

a) $\frac{p+q}{pq}$ b) $\frac{q-p}{p^4q^4}$ c) $\frac{q-p}{p^3q^3}$

d) $\frac{p-q}{p^2q^2}$ e) $\frac{p+q}{p^2q^2}$

54. Si :

$$b^2x^4+a^2y^4=a^2b^2 \quad y$$

$$a^2+b^2=x^2+y^2=1$$

Calcular :

$$\frac{\sqrt{b^4x^6+a^4y^6}}{b^2x^4+a^2y^4}$$

a) 1 b) 1/2 c) 3/2
d) 1/4 e) 3/4

55. Sabiendo que :

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$$

Hallar : $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}$

a) 1 b) 0 c) -1
d) 3 e) 2

56. Si :

$$\frac{(a-b)(z-x)}{(a-c)(x-y)}+\frac{(b-c)(z-x)}{(a-c)(y-z)}=1$$

Reducir :

$$\frac{(a-b)(y-z)^2+(b-c)(x-y)^2}{(a-c)(z-x)^2}$$

a) abc b) xyz c) 0
d) 1 e) N.A.

57. Si : a + b + c = 0
Señale la suma de coeficientes de los 4 términos obtenidos al reducir :

$$\frac{a^{11}+b^{11}+c^{11}}{-11abc\,(ab+ac+bc)}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

58. Si : x + y + z = 0.

Reducir :

$$R=\frac{(ax-by)^4+(ay-bz)^4+(az-bx)^4}{(ay-bx)^4+(az-by)^4+(ax-bz)^4}$$

a) 1 b) a+ b+ c c) abc
d) 2abc e) -abc

59. Reducir :

$$E=\sum_{k=1}^{2000}\frac{2^{k-1}}{1+x^{2^{k-1}}}-\frac{2^{2000}}{1-x^{2^{2000}}}$$

Indicando : $E^{-1}+1$.

a) 1 b) -1 c) x
d) -x e) x^{2000}

60. Reducir :

$$\frac{\frac{1}{a-x}+\frac{x}{(a-x)^2}+\frac{x^2}{(a-x)^3}+...+\frac{x^{2n-1}}{(a-x)^{2n}}}{\frac{1}{a-x}-\frac{x}{(a-x)^2}+\frac{x^2}{(a-x)^3}-...-\frac{x^{2n-1}}{(a-x)^{2n}}}$$

a) $\frac{a}{2x-a}$ b) $\frac{a}{2x+a}$ c) $\frac{a}{a-2x}$

d) $\frac{a}{a-x}$ e) $\frac{x}{a-x}$

Claves

01.	d
02.	b
03.	c
04.	d
05.	e
06.	a
07.	e
08.	e
09.	a
10.	b
11.	a
12.	c
13.	d
14.	e
15.	c
16.	d
17.	e
18.	d
19.	e
20.	b
21.	b
22.	e
23.	d
24.	d
25.	b
26.	c
27.	a
28.	a
29.	c
30.	c

31.	c
32.	e
33.	d
34.	e
35.	b
36.	a
37.	e
38.	e
39.	d
40.	b
41.	e
42.	b
43.	a
44.	c
45.	d
46.	b
47.	c
48.	c
49.	c
50.	a
51.	b
52.	b
53.	b
54.	c
55.	b
56.	b
57.	a
58.	b
59.	c
60.	c

Capítulo

7 TEOREMA DEL BINOMIC

Trata del desarrollo o expansión de : $(x+a)^n$ para "n" entero y positivo. Previamente estudiaremos algunos conceptos básicos necesarios para este capítulo.

Factorial

El factorial de un número "n" (entero y positivo), es el producto de multiplicar todos los números consecutivos desde la unidad hasta el número "n".

Notación

$$\left.\begin{matrix} n! \\ \underline{\lfloor n} \end{matrix}\right] \text{ factorial de "n"}$$

Por definición :

$$\boxed{n! = 1\times 2\times 3\times \ .... \times n} \quad (n \geq 2)$$

Ej. * $3! = 1\times 2\times 3 = 6$

* $6! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6 = 720$

Definiciones :

Factorial de cero $\boxed{0! = 1}$

Factorial de la unidad $\boxed{1! = 1}$

Propiedad

$$\boxed{n! = (n-1)!n}$$

Ej. $80! = \underbrace{\overbrace{1\times 2\times 3\times ....\times 78}^{78!}\times 79}_{79!}\times 80$

$80! = 79!\ 80$

$80! = 78!\ 79\times 80$

Igualdad de Factorial :

I. Si : $a! = 1 \Rightarrow a = 0$ ó $a = 1$

II. Si : $a! = b! \Rightarrow a = b\ (a, b \neq 0, 1)$

Semifactorial

Se representa por : N!! y su definición depende, si "N" es par o impar.

$N = 2n\,(\text{par}) \Rightarrow (2n)!! = 2\times 4\times 6\times ...\times 2n$

$$\boxed{(2n)!! = 2^n(n!)}$$

$N = 2n-1\,(\text{impar}) \Rightarrow (2n-1)!! = 1\times 3\times 5 ...\times (2n-1)$

$$\boxed{(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n\,n!}}$$

Observación :

$n!! \rightarrow$ semifactorial de "n".

$(n!)! \rightarrow$ factorial de factorial de "n"

Ej. $(3!)! = 6! = 72$

$3!! = 1\times 3 = 6$

ANÁLISIS COMBINATORIO

PERMUTACIONES

Permutar "n" elementos es formar grupos de "n" elementos cada uno, tal que un grupo se diferencia del otro por el orden :

Ej. Pemutar : a, b, c (3 elementos)

Formando grupos

$$\left.\begin{matrix} a & b & c & \quad & a & c & b \\ b & a & c & & b & c & a \\ c & a & b & & c & b & a \end{matrix}\right\} \ \#\text{ de permutas} = 6$$

Número de Permutaciones

Se representa por : P_n y se obtiene por la siguiente fórmula:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Ej. $P_3 = 3! = 6$

VARIACIONES

Formar variaciones con "n" elementos tomados de "k" en "k". Es formar grupos de "k" elementos cada uno, de tal manera que un grupo se diferencia del otro en el orden, o en algún elemento.

Ej. : Formar variaciones con : a, b, c, de 2 en 2.

Tendremos : $\left.\begin{matrix} ab & ac & bc \\ ba & ca & cb \end{matrix}\right\}$ # de variaciones = 6

El número de Variaciones se representa por : V_k^n

Fórmula : $\boxed{V_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$

Ej. $V_2^3 = \dfrac{3!}{(3-2)!\,2!} = 6$

COMBINACIONES

Formar combinaciones con "n" elementos tomados de "k" en "k". Es formar grupos de "k" elementos cada uno, tal que un grupo se diferencia del otro por lo menos en un elemento.

Ej.
Formar combinaciones con : a, b, c, d, de 2 en 2.

Tendremos :

$\left.\begin{matrix} ab & ac & ad \\ bc & bd & cd \end{matrix}\right\}$ # de combinaciones = 6

Número Combinatorio

El número de combinaciones formadas se denominan número combinatorio, se representa por : C_k^n

Fórmula : $\boxed{C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}}$

Ej. $C_2^4 = \dfrac{4!}{(4-2)!\;2!} = \dfrac{2}{2\times 2} = 6$

Propiedades del Número Combinatorio

1. $\boxed{C_0^n = 1}$ $\boxed{C_n^n = 1}$ $\boxed{C_1^n = n}$

2. Combinatorios Complementarios

   $\boxed{C_k^n = C_{n-k}^n}$

3. Suma de Combinatorios

   $\boxed{C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}}$

4. Degradación de Combinatorios

   * $\boxed{C_k^n = \dfrac{n}{k} C_{k-1}^{n-1}}$

   * $\boxed{C_k^n = \dfrac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n}$

   * $\boxed{C_k^n = \dfrac{n}{n-k} C_k^{n-1}}$

FÓRMULA DEL TEOREMA DEL BINOMIO

Esta fórmula atribuida incorrectamente a Newton nos permite obtener el desarrollo de $(x+a)^n$, siendo "n" entero y positivo. (El aporte de Newton fue el desarrollo cuando "n" es negativo y/o fraccionario).

Fórmula :

$$\boxed{(x+a)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} a + C_2^n x^{n-2} a^2 + \ldots + C_n^n a^n}$$

Ej. $(x+a)^4 = C_0^4 x^4 + C_1^4 x^3 a + C_2^4 x^2 a^2 + C_3^4 x a^3 + C_4^4 a^4$

$(x+a)^4 = x^4 + 4x^3 a + 6x^2 a^2 + 4xa^3 + a^4$

Observaciones del desarrollo de $(x+a)^n$

1. El número de términos del desarrollo, es el exponente del binomio aumentado en uno. Es decir :

   $\boxed{\#\ \text{términos} = n+1}$

2. Si el binomio es homogéneo, el desarrollo será homogéneo del mismo grado.

3. Si los coeficientes del binomio son iguales, los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos, son iguales.

4. Recordando que la suma de coeficientes se obtiene para x = a = 1, tendremos :

   $$\boxed{C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n = 2^n}$$

FÓRMULA DEL TÉRMINO GENERAL

Se utiliza para obtener un término cualquiera del desarrollo en función del lugar que ocupa.

Se representa por : $\boxed{T_{k+1}}$

Fórmula : En $(x+a)^n$

$$\boxed{T_{k+1} = C_k^n\, x^{n-k} a^k}$$

En donde : n $\rightarrow$ exponente del binomio
k+ 1 $\rightarrow$ lugar del término
x, a $\rightarrow$ términos del binomio

Ej.

Halle el término de lugar 40 en el desarrollo de:

$$(x^2 - y^3)^{60}$$

tendremos :

$$T_{39+1} = C_{39}^{60}(x^2)^{60-39}(-y^3)^{39}$$

$$T_{40} = -C_{39}^{60}\, x^{42} y^{117}$$

OTRAS DEFINICIONES Y FÓRMULAS

I. Coeficiente Binónico : Se representa por $\binom{n}{k}$;

$n \varepsilon R$; $k \varepsilon Z^+$
siendo su desarrollo :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)......[n-(k-1)]}{k!}}$$

Observaciones ;

* Si $n \varepsilon Z^+$: $\binom{n}{k} = C_k^n$

* $\binom{n}{0} = 1$

II. Fórmula para :

$$(1+x)^n \rightarrow \begin{cases} n : \text{negativo y/o fraccionario} \\ -1 < x < 1 \;;\; x \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + ...}$$

III. Número de términos de :

$(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k)^n$ n : entero y positivo.

$$\boxed{\#\text{ de términos} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}}$$

IV. En : $(a_1 + a_2 + a_3 + ... \, a_k)^n$ n : entero y positivo.

$$\boxed{\text{Coeficiente de } a_1^{\alpha} a_2^{\beta} a_3^{\gamma} .... a_k^{\phi} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,....\phi!}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Reducir :

$$M = \left[\frac{6!+5!}{5!+4!}\right]^{\underline{|0}}$$

a) 1 b) 2 c) $\frac{35}{3}$

c) $\frac{35}{6}$ e) $\frac{1}{8}$

02. Calcular "x", si :

$$\frac{(3x+4)(3x+4)!(3x+6)!}{(3x+5)!-(3x+4)!} = 72!$$

a) 12 b) 30 c) 22
d) 21 e) 18

03. Resolver :

$$x\left[\frac{x!+2(x-1)!}{x!+(x+1)!}\right] = x!-23$$

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

04. Calcular "x" que verifique :

$$C_3^{x-8} = 220$$

a) 17 b) 18 c) 21
d) 23 e) 20

05. Resolver :

$$\frac{(x!)^2}{(2x)!}C_{x+1}^{2x+1} = \frac{17}{9}$$

a) 5 b) 7 c) 8
d) 9 e) 6

06. Determinar "x" que verifica la ecuación :

$$\frac{22}{x-8}C_8^{x-1} = C_7^x$$

a) 8 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

07. En la suma combinatoria :

$$S = \binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}$$

donde : $n \varepsilon N$, $n \geq 3$.
Al simplificar, se obtiene siempre.

a) Un número primo.
b) Un cuadrado perfecto.
c) Un número impar.
d) Un número par.
e) Un múltiplo de 4.

08. Determinar el término de lugar 10 en la expansión de:

$$\left(27x^5+\frac{1}{3x}\right)^{12}$$

a) $220x^5$ b) $220x^7$ c) $220x^6$
d) $330x^6$ e) $320x^6$

09. Para qué valor de "n" en el tercer término del desarrollo de $(x^{-1}+\sqrt{2}\,x^{17})^n$ el coeficiente es igual al exponente de x :

a) 5 b) 6 c) 7
d) 9 e) 18

10. Calcular "n", si en el desarrollo de :
$(x^2+0{,}5x^{-1})^n$ el onceavo término es de grado 20.

a) 5 b) 15 c) 10
d) 25 e) 20

11. Calcular (n + k), si se sabe que el cuarto término del desarrollo de $(x+2)^n$ es $80x^k$.

a) 5 b) 9 c) 6
d) 10 e) 7

12. Hallar el lugar que ocupa un término del desarrollo de: $(x^3-2x^{-2})^{13}$ que tiene como parte literal a x^{14}.

a) 9 b) 5 c) 6
d) 7 e) 2

13. Calcular el término independiente del desarrollo de :

$$(x^2+\sqrt[5]{x^{-3}})^{13}$$

a) 297 b) 384 c) 286
d) 354 e) 374

14. Al desarrollar $(5x^{17}-y^{15})^n$ la suma de todos los exponentes de "x" e "y" es "n" veces la suma d coeficientes, hallar "n".

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

15. El producto de las sumas de coeficientes de los desarrollos de : $(x+6y-4)^{n+1}$; $(4x+5y)^{n-2}$ es 3^{n+7}. Halle el número de términos del desarrollo de: $(9x^2-y)^{n+3}$.

a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

16. Si : (x + 1)! - x! = 18.
El valor de : (x+ 1)! + x! es :

a) 24 b) 36 c) 30
d) 54 e) 60

17. Resolver :

$$3.6.9.\,.....\,.(3n-3).(3n)=9^{n-12}n!$$

a) 12 b) 18 c) 24
d) 8 e) 36

18. La suma de "n" y el menor valor de "k", que satisfacen las siguientes condiciones :

$n! = 720$ y $\binom{n+2}{k} = 56$ es :

a) 8 b) 6 c) 11
d) 9 e) 7

19. Determinar "a" y "b" en la igualdad :

$$\frac{a!\,.\,b!}{4}=(3!)^2$$

a) a = 7, b = 3 b) a = 8, b = 9
c) a = 4, b = 3 d) a = 2, b = 1
e) a = 5, b= 6

20. Calcular "n" en la ecuación :

$$n!+5-22\frac{(n!+1)}{(n!-5)}=\frac{1}{(n!-5)}$$

a) 6 b) 3 c) 2
d) 4 e) 5

21. Determinar el penúltimo término en el desarrollo de : $(3x^2-y^3)^{12}$.

a) $36x^2y^{11}$ b) $-24x^3y^2$ c) $24x^3y^2$
d) $-36x^2y^{33}$ e) $-12xy^2$

22. Proporcionar el coeficiente del término de grado 7 en el desarrollo de $(x^7+x^{-7})^7$.

a) 21 b) 35 c) 42
d) 70 e) 14

23. ¿Qué lugar ocupa el término que contiene x^{29} en el desarrollo de $(2x^2+3x^{-1})^{22}$?

a) 5to. b) 6to. c) 8vo.
d) 4to. e) 12vo.

24. Si en el desarrollo de :

$$B(x)=\left(3x^3+\frac{y^2}{x}\right)^n$$

existe un término cuyos exponentes de "x" é "y" son respectivamente 5 y 8. Halle el número de términos del desarrollo.

a) 8 b) 7 c) 9
d) 6 e) 10

25. El término independiente de "x", en :
$(\frac{2}{5}x^2+\frac{1}{2x})^9$ es :

a) 0,018 b) 0,002 c) 0,084
d) 0,001 e) 0,025

26. Deteminar el término racional en el desarrollo de :

$$(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2})^5$$

a) 10 b) 20 c) 30
d) 40 e) 50

27. En el desarrollo de $(2x-y)^{10}$, el coeficiente de x^6y^4 es :

a) 13 380 b) 13 450 c) 13 460
d) 13 440 e) 13 455

28. Indicar el lugar que ocupa el término que sólo depende de "x" :

$$\left(x^4y+\frac{1}{xy^4}\right)^{100}$$

a) 13 b) 14 c) 19
d) 21 e) Es imposible determinarlo.

29. Calcular "n", si al desarrollar :
$(x^6-1)^4.(x^4+x^2+1)^{2n}(x^2-1)^{2n}$, se obtiene 25 términos.

a) 10 b) 18 c) 8
d) 20 e) 12

30. Dos términos consecutivos del desarrollo de $(x+n)^n$ tienen igual coeficiente; luego estos términos son :

a) Primero y segundo.
b) Segundo y tercero.
c) Tercero y cuarto.
d) Antepenúltimo y penúltimo.
e) Penúltimo y último.

31. ¿Cuántos términos irracionales presenta el desarrollo de : $\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}\right)^{48}$?

a) 44 b) 32 c) 34
d) 42 e) 26

32. Cuántos términos fraccionarios hay en el desarrollo de:

$$\left(2x^3+\frac{3}{x}\right)^{100}$$

a) 18 b) 21 c) 24
d) 25 e) 27

33. El desarrollo de $(a+b+c+d+e)^n$, posee 14 términos más que el desarrollo de $(a+b+c+d)^{n+1}$. Calcular : C^{n+1}_{n-1}.

a) 6 b) 10 c) 15
d) 21 e) 28

34. Calcular : a + b, si :

$$(30^{a!}.24^{a!})^{a+1}=((b!)!)^{720}$$

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

35. Determinar el valor de "m" en la expresión :

$$\frac{(2m)!}{2^m.m!.1.3.5....(2m+1)}=\frac{1}{9}$$

a) 256 b) 3125 c) 4
d) 27 e) 7776

36. Calcular "n+ k", en :

$$C^{n+1}_{k+1}+C^n_k+\left(\frac{n-k+2}{n+1}\right)C^{n+1}_{k-1}=C^{30}_{13}$$

a) 40 b) 44 c) 47
d) 50 e) Hay 2 correctas

37. Sabiendo que :

$$\frac{C^{m+1}_{n+1}}{m+n+x}=\frac{C^m_n}{m+n}=\frac{C^{m-1}_{n-1}}{m+n-x}$$

Calcular el valor de "m-n", siendo : $x\neq 0$.

a) 1 b) 2 c) 4
d) x e) 3x

38. Si :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=(a+b)^n$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Calcular : $2\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}$

a) $2^{n+1}-n^2+n-2$ b) $2^{n+1}+n^2+n-2$
c) $2^{n-1}-n^2+n+2$ d) $2^{n+1}-n^2-n-2$
e) $2^{n+1}-n^2-n+2$

39. Calcular "n", si $n\,\varepsilon Z^+$ en :

$$F(x;y)=\left(\frac{y^6}{x^4}+\frac{x^6}{y^4}\right)^n$$

para que en el desarrollo de dicha potencia dos términos consecutivos del mismo sean independientes de "x" e "y" respectivamente.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 10

40. En el desarrollo de : $(2+3x^2)^n$, el coeficiente de x^{24} es 4 veces el coeficiente de x^{22}. Calcular el término independiente del desarrollo.

a) 2^{19} b) 2^{23} c) 2^{43}
d) 2^{25} e) 2^{21}

41. Hallar el término central del desarrollo de :

$$B(x;y)=(x^{-2}+y^n)^{2n}$$

si dicho término central es de grado "n".

a) $10x^{-6}y^9$ b) $20x^{-6}y^9$ c) $11x^{-9}y^6$
d) $30x^{-6}y^5$ e) $10x^{-6}y^4$

42. Los coeficientes de los términos centrales de los desarrollos de : $(a+b)^{n+2}$ y $(a+b)^n$; $n\,\varepsilon Z^+$; son entre sí como 15 es a 4. Calcular "n".

a) 1 b) 2 c) 3
d) 14 e) Hay dos correctas.

43. Dado los términos semejantes uno del desarrollo de $x(x^a+y^b)^a$ y otro de $y(x^b+y^a)^b$ ambos ocupan la misma posición en cada polinomio. Determinar el valor de :

$$\frac{(a^2+b^2)^2}{1+a^2b^2}$$

a) 2 b) 4 c) 6
d) 9 e) 12

44. Si en el desarrollo de $(ax^a + bx^b)^n$, los términos de lugares a + 3 y b - 1 equidistan de los extremos; además la suma de todos los coeficientes es 27. Hallar la suma de todos los exponentes de variable "x" en su desarrollo.

a) 20 b) 18 c) 16
d) 14 e) 15

45. Calcular : $\dfrac{(a^2+b^2)^2}{(ab)^2+1}$; $ab \neq 0$.
Sabiendo que dos términos cualesquiera del desarrollo de :

$$F(x,y) = (ax^{a^2-1} + by^{b^2+1})^{ab}$$

presentan el mismo grado absoluto.

a) 1 b) 2 c) 4
d) 6 e) 8

46. El mínimo entero "m", tal que :
$(xy - 7x + 9y - 63)^m$ tenga al menos 1998 términos es:

a) 40 b 41 c) 42
d) 43 e) 44

47. Simplificar :

$$\frac{1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+...+(1+x)^{n-1}}{C_1^n + C_2^n x + C_3^n x^2 + C_4^n x^3 + ... + C_n^n x^{n-1}}$$

a) 1 b) $\dfrac{x}{x+1}$ c) x

d) $\dfrac{x-1}{x}$ e) -1

48. Determinar el coeficiente de x^n en el desarrollo de :

$$(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ...)^n ; (|x| < 1)$$

a) C_{n+1}^{2n+1} b) C_{2n+1}^{3n+1}

c) $(-1)^n C_{2n-1}^{3n}$ d) $(-1)^n C_{n+1}^{2n+1}$

e) $(-1)^n C_{2n-1}^{3n-1}$

49. Si : $n \varepsilon Z^+$, calcular :

$$M = \binom{n}{1}x(1-x)^{n-1} + 2\binom{n}{2}x^2(1-x)^{n-2} + ...$$

$$... + k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + ... + n\binom{n}{n}x^n$$

a) n + x b) n c) x
d) nx e) n - x

50. Calcular : a+ b, si un término de $(x+y+z)^7$ es $ax^2y^3z^b$.

a) 215 b) 342 c) 148
d) 212 e) 510

51. Hallar el coeficiente de x^4y^2 en el desarrollo de :
$(1 + 2xy + 3x^2)^7$.

a) 1260 b)105 c) 1420
d) 120 e) 1480

52. Determínese el coeficiente del término en x^{10} del desarrollo de :

$$(1 + 3x^2 + 3x^4)^7$$

a) 807 b) 918 c) 19 278
d) 15 362 e) 1254

53. Determinar la suma de todos los términos cuyo grado relativo a "x" sea 3 en el desarrollo de :

$$(1 + x + y)^5$$

a) $(1+20y)x^3$ b) $10(1+y^3)x^3$

c) $5(1+y^2)x^3$ d) $5(y^2+2y)x^3$

e) $10(y+1)^2x^3$

54. En el desarrollo de : $(x^2 + y - x)^8$, determinar los coeficientes de los términos de la forma :
$x^{10}y^m$, donde "m" es par no nulo.

a) 28; 56 b) 420 c) -420
d) 1 e) 6

55. El coeficiente del término x^n en el desarrollo de :
$(1 + x + x^2)^{-1}$; es :

I. 1 ; si : n = 3k; $k \varepsilon Z^+$

II. 0 ; si : n = 3k-1; $k \varepsilon Z^+$

III. -1; si : n = 3k+ 1; $k \varepsilon Z^+$

a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III
d) II y III e) Todas

56. Determinar el coeficiente del término del desarrollo de $(a+4b+c)^n(a-2b+c)^n$ en el cual el grado de (a+ b+ c) excede en 14 unidades al lugar que ocupa y éste es un tercio del valor de "n".

a) $200(13)$ b) $-220(3^6)$

c) $210(3^2)$ d) 230

e) $110(3^3)$

57. Dado el binomio : $(x-3y^2)^{12}$, si un término de su desarrollo es contado desde el final. ¿En qué posición se ubica, si en dicho término el G.R.(y) = 2G.R.(x)?

a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

58. Hallar el equivalente numérico de :

$$E = 2[3^{70}C_0^{70} + 3^{68}C_2^{70} + 3^{66}C_4^{70} + ... + 1]$$

a) $3^{70}(3^{70}+1)$ b) $4^{70}(2^{70}+1)$

c) $3^{70}(2^{70}+1)$ d) $2^{70}(2^{70}+1)$

e) $2^{70}(3^{70}+1)$

59. Al expandir : $\left(y\sqrt[6]{x} + x\sqrt[6]{y}\right)^{84}$, se obtiene un término cuya parte literal es $(xy)^n$. Calcular "n".

a) 42 b) 44 c) 78
d) 49 e) 88

60. Indicar el grado del producto de los términos centrales obtenidos al efectuar :

$$(x^{39} + 39x^{38} + C_2^{39}x^{37} + ... + 39x + 1)^3$$

a) 114 b) 117 c) 58
d) 78 e) 123

Claves

01.	c
02.	c
03.	b
04.	c
05.	c
06.	c
07.	b
08.	c
09.	b
10.	d
11.	e
12.	c
13.	c
14.	a
15.	d
16.	c
17.	c
18.	c
19.	c
20.	d
21.	d
22.	b
23.	b
24.	a
25.	c
26.	d
27.	d
28.	d
29.	a
30.	e

31.	a
32.	d
33.	b
34.	d
35.	c
36.	e
37.	a
38.	d
39.	d
40.	c
41.	b
42.	d
43.	b
44.	b
45.	c
46.	e
47.	a
48.	e
49.	d
50.	d
51.	a
52.	c
53.	e
54.	b
55.	e
56.	b
57.	b
58.	d
59.	d
60.	b

Capítulo 8 RADICACIÓN

RADICACIÓN

Es la operación que tiene como objetivo calcular una expresión llamada raíz, tal que elevada al índice resulte otra expresión llamada radicando o cantidad subradical.

Veamos :

Si : $\sqrt[n]{A} = b \Rightarrow \boxed{b^n = A}$

En donde :

$$\left\{\begin{array}{lll} \sqrt[n]{A} & \longrightarrow & \text{radical} \\ A & \longrightarrow & \text{radicando o cantidad subradical} \\ b & \longrightarrow & \text{raíz} \\ n & \longrightarrow & \text{índice} \\ \sqrt{\ } & \longrightarrow & \text{signo de radical} \end{array}\right.$$

Valor Aritmético de un radical

Es aquel valor real, positivo y único, que elevado al índice, reproduce al radicando.

Observación :

Cuando se tiene $\sqrt[n]{A}$ implícitamente nos están pidiendo el valor aritmético.

Debemos tener en cuenta la definición :

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

Radicales Homogéneos

Son aquellos que tienen índices iguales. Es importante tener en cuenta que las operaciones de multiplicación y división, sólo se pueden efectuar entre radicales homogéneos.

Ejemplo :

* Son radicales homogéneos.

  $\sqrt[5]{xy}$; $\sqrt[5]{a}$; $\sqrt[5]{zw^2}$

* Multiplicación.

  $\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}\ \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$

* División.

  $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Radicales Semejantes

Son aquellos que tienen índices y radicandos iguales. Estos radicales son los únicos en los que se puede efectuar la adición o sustracción.

Ejemplos :

* $5\sqrt[4]{xy}$; $\frac{1}{2}\sqrt[4]{xy}$; $a\sqrt[4]{xy}$ $\rightarrow$ radicales semejantes.

Adición : $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

Sustracción : $11\sqrt[3]{4} - 8\sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$

Transformación de radicales dobles en simples

I. ***Radicales de la forma*** : $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

Primer Método :

$$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-c}{2}}}$$

Donde :

$c = \sqrt{A^2 - B}$ $\rightarrow$ debe ser racional
($\sqrt{\ }$ exacta)

Ejemplo : Descomponer :

* $\sqrt{5 + \sqrt{24}}$

calculemos "c" ; donde : A = 5; B = 24.

$c = \sqrt{5^2 - 24} = 1$

$$\Rightarrow \sqrt{5 + \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Segundo Método

Se forma trinomio cuadrado perfecto, recordemos que:

$$(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2 = a+b\pm 2\sqrt{ab}$$

Veamos :

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2} = \sqrt{a}\pm\sqrt{b}\ (a>b)$$

Ejemplo :

* $\sqrt{8-\sqrt{60}} = \sqrt{5+3-2\sqrt{5\times 3}} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$

II. ***Radicales de la forma*** : $\sqrt[3]{A\pm\sqrt{B}}$

$$\sqrt[3]{A\pm\sqrt{B}} = x\pm\sqrt{y}\ \ (x\ \varepsilon\ Q;\ y\ \varepsilon\ Q^{+}).$$

Los valores de "x" e "y" y se obtienen resolviendo las siguientes ecuaciones :

$$4x^3 = A+3Cx \ ......\ (1)$$

$$x^2 - y = C \ ......\ (2)$$

Donde :

$$C = \sqrt[3]{A^2-B} \rightarrow \text{racional } (\sqrt[3]{\ }\ \text{exacta}) \cdot$$

Sugerencia : como "x" es racional entero, es recomendable "tantear" con valores enteros de "x", en la ecuación (1).

Ejemplo :

Transformar : $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}$

tendremos :

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} = x+\sqrt{y} \ ....\ (\alpha)$$

como : A = 10; B = 108, entonces :

$$C = \sqrt[3]{10^2-108} = -2$$

Luego en (1) :

$$4x^3 = 10+3(-2)x$$

$$4x^3 = 10-6x \rightarrow \text{se verifica para : } x = 1$$

Ahora en (2) :

$$x^2 - y = -2 \rightarrow 1^2 - y = 2 \Rightarrow y = 3$$

Reemplazando en (α) :

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} = 1+\sqrt{3}$$

Observación :

El mismo método se utiliza para la forma :

$$\sqrt[3]{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}$$

reemplazando en todas las ecuaciones :

$\sqrt{A}$ por "A" y $\sqrt{x}$ por "x".

RACIONALIZACIÓN

Es el proceso que consiste en transformar el denominador irracional de una fracción; en otro que sea racional.

Factor racionalizante (F.R.)

Es aquella expresión irracional que, al multiplicarla, por una cierta expresión irracional dada la transforma en racional.

Propiedad

Para racionalizar una fracción bastará con multiplicar sus términos por el factor racionalizante del denominador.

Casos de Racionalización

I. Racionalización de Expresiones Monomiales

En este caso, el factor racionalizante es homogéneo con la expresión para racionalizar, debe cumplirse que luego de la multiplicación los exponentes del radicando deben ser iguales al índice o al menor de sus múltiplos.

Ejemplo :

Racionalizar el denominador de :

$$\frac{N}{\sqrt[7]{x^4y^{12}}}$$

tendremos :

$$\frac{N}{\sqrt[7]{x^4y^{12}}}\cdot\frac{\sqrt[7]{x^3y^2}}{\sqrt[7]{x^3y^2}} \Big\rangle\ \text{F. R.}$$

4 + 3 → igual al índice

12 + 2 = 14 (menor múltiplo de 7)

$$\frac{N.(F.R.)}{\sqrt[7]{x^7y^{14}}} = \frac{N.(F.R.)}{xy^2} \rightarrow \text{denominador racional}$$

II. *Racionalización de Suma o Resta de Radicales con índice 2 o sus potencias*

En este caso, el factor racionalizante se obtiene utilizando la diferencia de cuadrados.

Recordemos :

$$\boxed{(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})=A-B}$$

Ejemplo :

Racionalizar el denominador de :

$$\frac{k}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{y}}$$

Tendremos :

$$\frac{k}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{y}}\cdot\frac{\overbrace{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}^{FR_1}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}\rightarrow\frac{k\,FR_1}{\sqrt{x}-y}$$

$$\frac{k\;RF_1}{\sqrt{x}-y}\cdot\frac{\overbrace{\sqrt{x}+y}^{FR_2}}{\sqrt{x}+y}\rightarrow\frac{k\,FR_1\,FR_2}{x-y^2}$$

denominador racional

III. *Racionalización de suma o resta de radicales con índice 3 o sus potencias*

En este caso, el factor racionalizante se obtiene utilizando la suma o diferencia de cubos.

Recordemos :

$$\boxed{(\sqrt[3]{A}\pm\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}\mp\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})=A\pm B}$$

Ejemplo :

Racionalizar el denominador de :

$$\frac{P}{x-\sqrt[3]{y}}$$

Tendremos :

$$\frac{P}{x-\sqrt[3]{y}}\cdot\frac{\overbrace{x^2+x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}^{FR_1}}{x^2+x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}=\frac{P.FR_1}{x^3-y}$$

denominador racional

IV. *Racionalización de Radicales de la forma*

$$\boxed{\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}}$$

En este caso, el factor racionalizante se obtiene utilizando cocientes notables, de la siguiente manera :

* $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}+\ldots$
$\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b\;\;(n\rightarrow \text{par o impar})$

* $(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}+\ldots$
$\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a+b\;\;(n\rightarrow \text{impar})$

* $(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}+\ldots$
$\ldots-\sqrt[n]{b^{n-1}})=a+b\;\;(n\rightarrow \text{par})$

Ejemplo :

Racionalizar el denominador de :

$$\frac{M}{\sqrt[7]{x}-\sqrt[7]{b}}$$

Tendremos :

$$\frac{M}{\sqrt[7]{x}-\sqrt[7]{b}}\cdot\frac{FR}{\sqrt[7]{x^6}+\sqrt[7]{x^5b}+\sqrt[7]{x^4b^2}+\ldots+\sqrt[7]{b^6}}=\frac{M.FR}{x-b}$$

denominador racional

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Efectuar :

$$(2\sqrt{3}+1)(3\sqrt{3}-2)+\sqrt[4]{9}$$

a) $-2\sqrt{3}$ b) 0 c) $6-2\sqrt{3}$
d) 16 e) -1

02. Calcular :

$$\sqrt{(3\sqrt{2}+2)^2+(2\sqrt{2}-3)^2+10}$$

a) 4 b) 7 c) $\sqrt{31}$
d) 6 e) 9

03. Efectuar :

$$\sqrt{5-\sqrt{7}}\,.\sqrt{3+\sqrt{7}}-\sqrt{7}$$

a) $-\sqrt{7}$ b) -1 c) $\sqrt{7}$
d) 1 e) $\sqrt{7}+1$

04. Efectuar :

$$E=\sqrt[3]{2}\;\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}\;\sqrt[6]{16-2\sqrt{48}}$$

a) $\sqrt[6]{3}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{2}$
d) 2 e) 1

05. Calcular :

$$\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{5-3\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{8+2\sqrt{12}}}}$$

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[4]{3}$
c) $\sqrt{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2\sqrt{2}}$
e) $\sqrt[4]{2}$

06. Efectuar :

$$(\sqrt{9-4\sqrt{5}}+2)^2+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$$

a) $8-\sqrt{5}$ b) 5 c) $7+2\sqrt{5}$
d) $\sqrt{5}-1$ e) $3-4\sqrt{5}$

07. Simplificar :

$$\frac{\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{250}}+\frac{\sqrt{32}+\sqrt{18}-\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 5 e) $\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}$

08. Reducir :

$$E=\frac{\sqrt{x^3y^2}}{\sqrt[3]{x^3y^2}}-\sqrt[6]{x^3y^2}$$

a) 0 b) x c) x - y
d) xy e) $\sqrt{xy}-x$

09. Efectuar :

$$R=\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}-2}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

a) 2 b) -2 c) 1
d) 0 e) -1

10. Hallar el verdadero valor de :

$$E=\frac{x+7}{\sqrt{x+9}-\sqrt{2}}\text{ ; para : } x=-7.$$

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{2}$ e) 2

11. Sea :

$$E=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

Entonces la expresión racionalizada es :

a) $(\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30})/12$
b) $(\sqrt{15}+\sqrt{18}-\sqrt{30})/18$
c) $(\sqrt{12}-\sqrt{18}+\sqrt{30})/12$
d) $(\sqrt{15}-\sqrt{18}+\sqrt{30})/18$
e) $(\sqrt{12}-\sqrt{15}-\sqrt{30})/12$

12. Si se cumple :

$$\frac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\text{ ; donde :}$$

$x > y > z$.
Calcule :

$$\sqrt{(x-y)(x-z)(y-2z)}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) $\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{2}$

13. Indicar el denominador racionalizado de :

$$E=\frac{1}{\sqrt{35}-\sqrt{6}+\sqrt{21}-\sqrt{10}}$$

a) 8 b) 20 c) 10
d) 40 e) 25

14. Calcular :

$$E=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}}\cdot\frac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{6}$ c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{3}-1$ e) $\sqrt{6}+1$

15. Si :

$$\sqrt{m+2\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}+\frac{7}{\sqrt{8}-1}$$

Calcular : m + n.

a) 15 b) 25 c) 35
d) 45 e) 55

16. Efectuar :

$$E=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)$$

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

17. Si :

$$a=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\ ;\ \ b=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

Calcular : $V=a^3b-ab^3$

a) 0 b) 1 c) 2
d) $-24\sqrt{2}$ e) $-2\sqrt{2}$

18. Efectuar :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left[\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}}\right]^{-1}$$

a) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{3}+1$

19. Reducir :

$$B=\sqrt{5}-\sqrt{2}\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$$

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}-2$
d) 1 e) $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$

20. Efectuar :

$$K=\sqrt{3+\sqrt{9+\sqrt{80}}+\sqrt{21-\sqrt{320}}}$$

a) 2 b) 3 c) 5
d) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{5}$

21. Efectuar :

$$\frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}+\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}-\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$$

a) 1 b) $\sqrt{5}$ c) 2
d) 0 e) $\sqrt{3}$

22. Calcular : x+ y+ z, si :

$$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}=\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}+\sqrt[6]{z}$$

a) 7/3 b) 7/9 c) 5/3
d) 5/9 e) 3/7

23. Calcular "x", en : $\sqrt{2b-\sqrt{3b^2}}=\sqrt{x}-\sqrt{2}$

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

24. Indicar el denominador racionalizado de :

$$\frac{4\sqrt{7}}{18+6\sqrt{7}+6\sqrt{2}+2\sqrt{14}}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 7

25. Sabiendo que : $n\,\varepsilon Z^+$; $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$ reales que verifican :
$\sqrt{n+1+\sqrt{n!}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$
Además : ab = (n-1)!. Hallar : a + b.

a) 5 b) 6 c) 7
d) 13 e) 8

26. Hallar el verdadero valor de :

$$E=\frac{x-8}{\sqrt{x+1}-3}\ ;\ \text{para } x=8.$$

a) 1/3 b) 1/6 c) 6
d) 3 e) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

27. Calcular el verdadero valor de :

$$M = \frac{xy - 4x}{\sqrt{xy} + \sqrt{3y} - 2\sqrt{x} - 2\sqrt{3}}$$

para : x = 3, y = 4.

a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$
d) 3 e) 4

28. Calcular el verdadero valor de :

$$E = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{x-4} - 2} \text{ ; para : } x = 8$$

a) 2/3 b) 4/5 c) 1/3
d) 1/6 e) -1/3

29. Hallar el verdadero valor de :

$$F = \frac{x^2 - 3x}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}} \text{ ; para } x = 3.$$

a) 9 b) $3\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[3]{9}$
d) $9\sqrt[3]{9}$ e) $\sqrt[3]{3}$

30. Hallar el verdadero valor de la fracción :

$$P(x) = \frac{3 - \sqrt{4+x}}{x-5}$$

cuando : x = 5.

a) 1/6 b) -1/6 c) 6
d) -6 e) 1

31. Si se cumple :

$$\sqrt{5x - 2 + 2\sqrt{6x^2 - 7x - 3}} = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx-a}$$

de modo que : $\{a, b, c\} \subset N$.
Calcular : a + b + c.

a) b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

32. Sabiendo que : $x^2 = x + 1; x > 0$
Reducir :

$$E = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

a) $\frac{\sqrt{x}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2x}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{x}{\sqrt{2}}$ e) $\frac{2\sqrt{x}}{2}$

33. Racionalizar :

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} \text{ ,}$$

la expresión resultante es :

a) $1-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}$
b) $1+\sqrt{2}-\sqrt{6}-\sqrt{3}$
c) $1-\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{3}$
d) $-1+\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{3}$
e) $-1+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}$

34. Si al dividir : $\sqrt{26-2\sqrt{7}}$ entre $\sqrt{3-\sqrt{7}}$ se obtiene una expresión de la forma $a+\sqrt{b}$ donde "a" y "b" son enteros positivos, entonces $a^2 - b$ es :

a) 9 b) 15 c) 29
d) 2 e) 18

35. Proporcionar el valor de : $\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\theta}}$

A partir de : $\sqrt{11\sqrt{2}-12} = \sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\theta}$

$\alpha > \theta \wedge \{\alpha, \theta\} \subset N$

a) 1 b) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

36. Racionalizar :

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}$$

a) 1 b) 9
c) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}$
e) $\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}$

37. Indicar el denominador racionalizado de :

$$F = \frac{1}{1+\sqrt[6]{16}-\sqrt[6]{2000}-\sqrt{5}}$$

a) 1 b) 20 c) 10
d) 5 e) 8

38. ¿Cuál es el denominador que se obtiene al racionalizar:

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}} \text{ ?}$$

a) 13 b) 17 c) 19
d) 23 e) 29

39. Racionalizar el denominador de :

$$F=\frac{1}{\sqrt[5]{8}-\sqrt[5]{4}+1}$$

e indicar la suma de cifras de éste.

a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

40. Si la expresión :

$$R=\sqrt{10}\left[\frac{\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}-\sqrt{\sqrt{10}-1}}\right]$$

es equivalente a : $\alpha\sqrt{\theta}+\theta.\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$ donde :

$\alpha\wedge\theta\varepsilon N$. Calcular el valor de : "$\alpha.\theta$".

a) 8 b) 6 c) 20
d) 12 e) 16

41. Efectuar :

$$E=\frac{1}{\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{18}+3}-1$$

a) 1 b) $\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$ c) $\frac{\sqrt[3]{12}}{3}$

d) $\frac{\sqrt[3]{12}}{6}$ e) $-\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$

42. Calcular :

$$E=\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}-\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}$$

para : $a^4-a^2=6$

a) $4\sqrt{6}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{6}$

43. Reducir :

$$A=\frac{\sqrt{x+24+10\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+15+8\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$$

Siendo : $1<x<2$.

a) 1 b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{8}{5}$

d) x - 1 e) $\sqrt{x-1}$

44. Hallar : $k^{3/4}$, si :

$$\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}=\sqrt[6]{2}+\sqrt[4]{k}$$

a) 2 b) 1/2 c) 3
d) 1/4 e) 4

45. Dar la suma de las cuartas potencias de los radicales simples que se obtienen al descomponer :

$$\sqrt{4+3\sqrt{2}}$$

a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

46. Hallar : a+ b, si la expresión :

$$E=\left[\frac{a+b\sqrt{2}}{2b-\sqrt{2}\,b+(\sqrt{2}-1)a}\right]^2$$

se le puede dar forma $a+\sqrt{b}$ donde : "a" y "b" son enteros positivos.

a) 17 b) 12 c) 11
d) 19 e) No se puede determinar.

47. Si : x > 1, reducir :

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}{2}+\frac{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}}{2}$$

a) $\sqrt{\frac{x+1}{2}}$ b) $\sqrt{x^2-1}$ c) $\sqrt{x-1}$

d) $\sqrt{x^2+1}$ e) $\sqrt{x}$

48. La expresión :

$$\frac{1}{\sqrt{2x+5+2\sqrt{x^2+5x+6}}}$$

es equivalente a :

a) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}$ b) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}$
c) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}$ d) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}$
e) 1

49. Descomponer en radicales :

$$\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}$$

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

50. Hallar el verdadero valor de :

$$\frac{a-3\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}-3}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}-6}$$

para : a = 27.

a) 2 b) 3 c) 1
d) 0 e) 1/3

51. Calcular el verdadero valor de :

$$E=\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt{x+2}-2}\ ;\ \text{para} : x = 2.$$

a) 3 b) 4 c) 1/4
d) 1/3 e) 3/4

52. Si : $\frac{5}{2}<x<3$ el equivalente de :

$$\sqrt{2x-2\sqrt{6x-9}}+\sqrt{2x-1-2\sqrt{4x-6}}$$

es :

a) $2\sqrt{2x-3}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2x}-3$
c) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ d) $2-\sqrt{3}$
e) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

53. Si : $\sqrt{a+4\sqrt{b+2}}=\sqrt{a-2}+\sqrt{2b}$
$\{a;b\}\subset N/a>b$. Mostrar un radical simple de : $\sqrt{a+b+2\sqrt{a+6b}}$.

a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{3}$
d) $\sqrt{2}$ e) a ó d

54. Si :

$$E=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

Calcular : $(E^3+1)^3$

a) 1/3 b) 3 c) 1
d) 8 e) 2

55. Calcular :

$$A=\frac{(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3}{\sqrt[3]{2}-1}$$

a) 1 b) 2 c) 9
d) 2/3 e) 3/2

56. Calcular :

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}+2}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{6+4\sqrt{3}}+\frac{1}{10+4\sqrt{5}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{990+100\sqrt{99}}$$

a) 1 b) 0,3 c) 0,8
d) 0,9 e) $0,\hat{7}$

57. Calcular :

$$F=\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}}{\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}}$$

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[6]{3}}$ c) $\sqrt[3]{3}$
d) $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ e) $\sqrt[3]{2}$

58. Si T es una expresión definida por :

$$T=\sqrt{\sqrt{2}-1}\ \{\sqrt{112+80\sqrt{2}}-\sqrt{68+52\sqrt{2}}\}$$

entonces al tranformar a radicales simples se obtiene :

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2
d) 4 e) $3\sqrt{2}$

59. Si : $\{x;y;z\}\subset Q^+$ proporcionar el valor de "x+ y+ z", de tal modo que se verifique :

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}$$

a) 0,7 b) $0,\hat{6}$ c) 0,6
d) $0,\hat{7}$ e) 0,78

60. Calcular el verdadero valor de :

$$F(x)=\frac{x\sqrt{x-1}-\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}}{x-2}$$

para : x = 2.

a) -2 b) $2\sqrt{2}$ c) 4
d) $\frac{11}{4}$ e) $-\frac{3}{2}$

Claves

01.	d
02.	b
03.	d
04.	d
05.	b
06.	a
07.	c
08.	a
09.	a
10.	d
11.	a
12.	b
13.	c
14.	b
15.	c
16.	c
17.	d
18.	a
19.	d
20.	b
21.	d
22.	b
23.	d
24.	e
25.	a
26.	c
27.	a
28.	c
29.	d
30.	b

31.	c
32.	d
33.	a
34.	e
35.	d
36.	d
37.	b
38.	d
39.	c
40.	c
41.	e
42.	a
43.	c
44.	a
45.	e
46.	c
47.	a
48.	b
49.	d
50.	a
51.	d
52.	e
53.	e
54.	e
55.	c
56.	b
57.	b
58.	c
59.	d
60.	d

Capítulo

9 NÚMEROS COMPLEJOS

Cantidades Imaginarias

Se obtienen al extraer raíz de índice par a un número negativo.

Ejemplo : $\sqrt{-2}$; $\sqrt[4]{-7}$; $\sqrt[6]{-4}$; ... etc.

Unidad Imaginaria

Definición

La unidad imaginaria se obtiene al extraer raíz cuadrada de -1, se representa de la siguiente manera :

$$\boxed{\sqrt{-1} = i}$$

también se define como :

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Potencias de la Unidad Imaginaria

$$\boxed{\begin{array}{l} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{array}}$$

Propiedades :

1. $\boxed{i^{4n} = 1 ; n \varepsilon Z}$

   Ejemplo : $i^{480} = i^{4(120)} = 1$

2. $\boxed{i^{4n+k} = i^k ; (n ; k \varepsilon Z)}$

   Ejemplo : $i^{47} = i^{4(11)+3} = i^3 = -i$

   $i^{-10} = i^{-3(4)+2} = i^2 = -1$

Observación : Es conveniente recordar las siguientes propiedades aritméticas.

$$(a+r)^n = \overset{\circ}{a} + r^n$$

$$(a-r)^n = \overset{\circ}{a} + r^n \quad (n \to \text{par})$$

$$(a-r)^n = \overset{\circ}{a} - r^n \quad (n \to \text{impar})$$

Ejemplo :

$$i^{9^{10^{11^{12}}}} = i^{(\overset{\circ}{4}+1)^{10^{11^{12}}}} = i^{\overset{\circ}{4}+1^{10^{11^{12}}}} = i^{\overset{\circ}{4}+1} = i$$

Números Complejos

Son aquellos números que tienen la forma :

$$\boxed{Z = a + bi = (a ; b); a, b \varepsilon R}$$

donde : $\begin{cases} a = \text{Re}_{(Z)} \text{ se llama, parte real de } Z \\ b = \text{Im}_{(Z)} \text{ se llama parte imaginaria de } Z \end{cases}$

CLASIFICACIÓN DE LOS COMPLEJOS

Complejos Conjugados $(\overline{Z})$

Son aquellos que sólo difieren en el signo de la parte imaginaria.

Ejemplo :

$Z = 3 + 4i$; su conjugado es : $\overline{Z} = 3 - 4i$

Complejos Opuestos (Zop)

Son aquellos que sólo difieren en los signos de la parte real e imaginaria, respectivamente.

Ejemplo :

$Z = 5 - 2i$; su opuesto es : $Zop = -5 + 2i$

Complejos Iguales

Son aquellos que tienen partes reales e imaginarias, respectivamente, iguales.

Ejemplo :
De la igualdad : $a + bi = 8 - 11i$
tenemos : $a = 8; b = -11$

Complejo Nulo

Son aquellos que tienen su parte real e imaginaria, respectivamente, iguales a cero.

Si : $a + bi$ es nulo $\Rightarrow a + bi = 0$
Luego : $a = 0; b = 0$

Complejo Imaginario Puro

Es aquel cuya parte real es igual a cero y su parte imaginaria distinta de cero.

Si : $a + bi \to$ es imaginario puro $\Rightarrow a = 0$

Complejo Real

Si un complejo es real, entonces su parte imaginaria igual a cero :

Si : a + bi $\rightarrow$ es real $\Rightarrow$ b = 0

Representación de los Complejos

I. Representación Cartesiana o Geométrica

En este caso, el complejo está representado de la forma:

$$\boxed{Z = a + bi}$$

Gráfica del Complejo

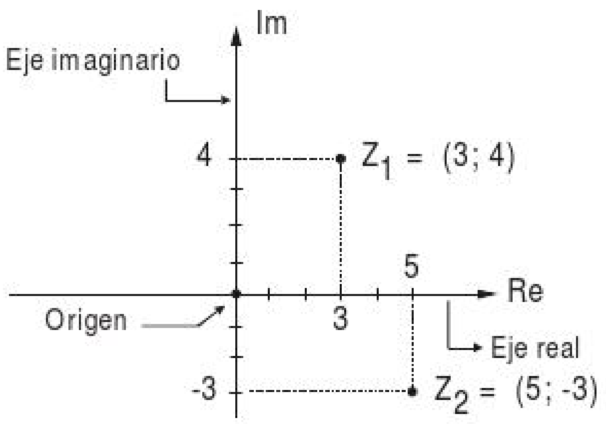
Cada complejo es un punto en el plano, para ubicarlo se le representa en el llamado plano complejo, Gaussiano o de Argand, el cual está formado por un eje vertical (eje imaginario) y un eje horizontal (eje real).

Ejemplo :

Graficar : $Z_1 = 3 + 4i$

$Z_2 = 5 - 3i$

En el plano Gaussiano :



Observación : Cada complejo se representa por un punto en el plano al cual se le llama afijo del complejo.

II. Representación Polar o Trigonométrica :

En este caso, el complejo adopta la forma :

$$\boxed{Z = \rho(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta)}$$

Donde : $\rho \rightarrow$ módulo; $\rho > 0$

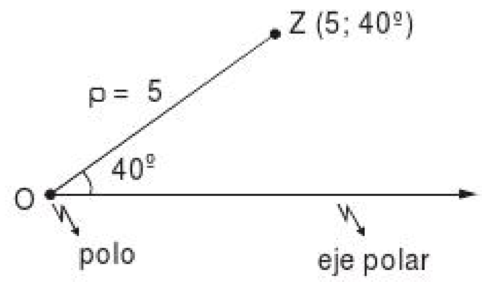
$\theta \rightarrow$ argumento; $0 \leq \theta < 2\pi$

Gráfica del Complejo

En este caso, se utiliza el sistema de coordenadas polares el cual está formado por un punto fijo llamado polo y una semirecta que parte del polo, llamado eje polar. El módulo (ρ) es la distancia del polo al punto que representa el complejo y el argumento (θ) el ángulo positivo medido en sentido antihorario desde el eje polar hasta el radio vector $\overrightarrow{OZ}$.

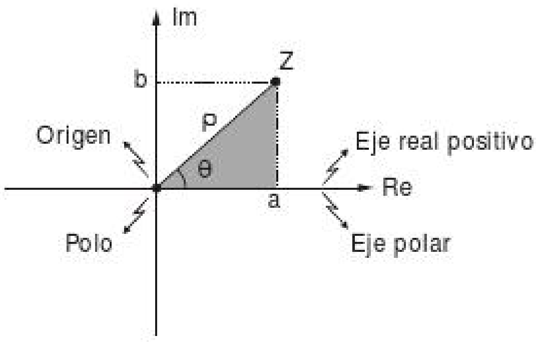
Graficar : Z = 5(Cos40° + iSen40°)

En el sistema de coordenadas polares :



Relación entre la Representación Cartesiana y Polar

Sea el complejo : Z = a+ b i (a, b > 0)



En la figura sombreada :

$$\begin{cases} * \ \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ * \ a = \rho\,\text{Cos}\theta \\ * \ b = \rho\,\text{Sen}\,\theta \\ * \ \theta = \text{ArcTg}\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

$$a + bi = \rho\,\text{Cos}\theta + (\rho\,\text{Sen}\theta)i$$

$$\boxed{a + bi = \rho(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta)}$$

Para transformar de cartesiana a polar se calcula ρ y θ. En el caso inverso, se calcula el valor de la función trigonométrica.

Aplicación :

1. Transformar : Z = 3 + 4i

   * $\rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

   * $\theta = \text{ArcTg}\dfrac{4}{3} = 53°$

   $\Rightarrow 3 + 4i = 5\,(\text{Cos}53° + i\,\text{Sen}53°)$

2. Transformar : Z = 6 (Cos37° + i Sen37°)

   Z = 6(Cos37° + i Sen37°)

   $Z = 6\,(\dfrac{4}{5} + i\dfrac{3}{5})$

   $Z = \dfrac{24}{5} + \dfrac{18}{5}i$

III. Representación de Euler

En este caso, se tiene :

expresado en radianes

$$\rho(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta) = \rho e^{i\theta}$$

Se cumple :

$$\boxed{\text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta = e^{i\theta}}$$

Siendo : e = 2,71828 .... (base de los logaritmos naturales).

Asimismo :

$$\boxed{a + bi = \rho(\text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta) = \rho e^{i\theta}}$$

OPERACIONES CON COMPLEJOS

I. ***Operaciones en forma cartesiana***

a) ***Adición y multiplicación***
Se utilizan las mismas reglas algebraicas.

Ejemplo : (3+ i)(3+ 2i) - (5-4i)

Resolución :

$$\begin{aligned} & 9 + 6i + 3i + 2i^2 - 5 + 4i \\ = & \; 9 + 6i + 3i - 2 - 5 + 4i \\ = & \; 2 + 13i \end{aligned}$$

b) ***División***
Se multiplica el numerador y denominador por el complejo conjugado de este último.

Ejemplo : $Z = \dfrac{2+3i}{3+i}$

$$Z = \frac{2+3i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i} = \frac{6-2i+9i-3i^2}{9-i^2}$$

$$Z = \frac{6+7i+3}{9-(-1)} = \frac{9+7i}{10} = \frac{9}{10} + \frac{7}{10}i$$

c) ***Potenciación*** :
Se utiliza el teorema del binomio.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (2i+3)^2 &= 4i^2 + 12i + 9 \\ &= -4 + 12i + 9 \\ &= 5 + 12i \end{aligned}$$

d) ***Radicación*** :
En general se asume que la raíz adopta la forma (a+ bi) ; luego a y b se hallan por definición de radicación.

Ejemplo : $\sqrt{5+12i}$

$$\sqrt{5+12i} = a + bi$$

Elevando al cuadrado

$$5 + 12i = a^2 - b^2 + 2abi$$

Igualando :

$$5 = a^2 - b^2 \,;\; 12 = 2ab$$

Resolviendo :

$$\left.\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt{5+12i} = 3 + 2i$$

$$\left.\begin{aligned} a &= -3 \\ b &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt{5+12i} = -3 - 2i$$

Observación :

* $(1 \pm i) = \pm 2i$
* $\dfrac{1+i}{1-i} = i$
* $\dfrac{1-i}{1+i} = -i$

Operaciones en forma polar

a) ***Multiplicación*** :
En este caso, los módulos se multiplican y los argumentos se suman.

$$Z_1 = \rho_1(\text{Cos}\theta_1 + i\,\text{Sen}\,\theta_1)$$

$$Z_2 = \rho_2(\text{Cos}\theta_2 + i\,\text{Sen}\,\theta_2)$$

$$\boxed{\Rightarrow Z_1\,Z_2 = \rho_1\,\rho_2\,[\text{Cos}(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{Sen}(\theta_1+\theta_2)]}$$

b) ***División*** :
En este caso, los módulos se dividen y los argumentos se restan.

$$Z_1 = \rho_1\,(\text{Cos}\;\theta_1 + i\,\text{Sen}\,\theta_1)$$

$$Z_2 = \rho_2\,(\text{Cos}\;\theta_2 + i\,\text{Sen}\theta_2)$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{Sen}\,(\theta_1 - \theta_2)]}$$

c) ***Potenciación*** :
En este caso, el exponente eleva al módulo y multiplica al argumento.

$$[\rho(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta)]^n = \rho^n[\text{Cos}\,n\theta + i\,\text{Sen}\,n\theta]$$

d) ***Radicación*** :
En este caso, se aplica la fórmula de De Moivre.

Sea : $Z = \rho(\text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta)$

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho}\left[\text{Cos}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \\ k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, (n-1)\end{gathered}}$$

Nota : observa que $\sqrt[n]{z}$ tiene "n" valores.

Ejemplo :
Hallar las raíces cúbicas de la unidad.

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1 + 0i} = \sqrt[3]{\text{Cos}\,0° + i\,\text{Sen}\,0°}$$

$$\sqrt[3]{1} = \text{Cos}\left(\frac{0° + 2k\pi}{3}\right) + i\,\text{Sen}\left(0° + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

$k = 0, 1, 2$

$k = 0 \rightarrow \sqrt[3]{1} = 1$

$k = 1 \rightarrow \sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = w$

$k = 2 \rightarrow \sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = w^2$

$\therefore$ Raíces cúbicas de la unidad :

$1; w; w^2$.

donde :

- $w^3 = 1$
- $1 + w + w^2 = 0$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Calcular :

$$\sqrt{-2}\,\sqrt{-8}+\sqrt{-12}\,\sqrt{-12}-\sqrt{-3600}\,\sqrt{-1}$$

a) 76 b) -76 c) 44
d) -44 e) 50

02. Reducir :

$$V=\frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}-i$$

$(i=\sqrt{-1})$

a) 1 b) 2 c) 3i
d) 2i e) 4i

03. Simplificar :

$$Z=\frac{i^{28}+i^{321}+i^{49}+i^{50}+i^{17}}{i^{1921}+i^{1932}-i^{1960}+i^{1973}-i^{2003}}$$

$(i=\sqrt{-1})$

a) i b) -i c) 1
d) -1 e) 1 - 1

04. Reducir :

$$J=i+i^2+i^3+i^4+...+i^{2003}$$

$(i=\sqrt{-1})$

a) 1 b) 2 c) -1
d) i e) 2i

05. Hallar la suma "A" de números complejos :

$$A=(1+i)+(2+i^2)+(3+i^3)+(4+i^4)+...+(4n+i^{4n})$$

a) n (2n+ 1) b) 2n (4n+ 1)
c) 0 d) n(4n+ 1)
e) 2n(4n-1)

06. Calcular :

$$V=i^{9^{10^{11^{12}}}}+i^{13^{14^{15^{16}}}}+i^{17^{18^{19^{20}}}}$$

$(i=\sqrt{-1})$

a) 0 b) 1 c) 3
d) 3i e) -3i

07. Si : $(ni^{12}+i^{13})(2i+n)=a^2+bi\,;\{a;b;n\}\subset R$

Calcular : $\frac{b}{n}(n^2-a^2)\,;(i=\sqrt{-1})$

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 6

d) $\frac{1}{3}$ e) 3

08. Si : $\sqrt{a^2+bi}=m+ni$

$\{a;b;m;n\}\subset R$; además : $i^2=-1$

Calcular : $\frac{m^2}{a^2+n^2}+\frac{b}{mn}$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

09. Calcular "n", si se cumple :

$$3(n+i)+5(n+3i)=3\sqrt{7}\,(a+2ai)$$

Si : $n\,\varepsilon R\wedge a\,\varepsilon R$.

a) $-\frac{3}{8}$ b) $\frac{9}{8}$ c) 9

d) $\frac{9}{4}$ e) $\frac{3}{4}$

10. Si : $n\,\varepsilon R\wedge z=\frac{3(n+i)+5(n+3i)}{1+2i}$

es un complejo real. Calcular : "n".

a) -3/8 b) 9/8 c) 9
d) 9/4 e) 3/4

11. Hallar "n", si el número siguiente es imaginario puro :

$$\frac{3-2ni}{4-3i}$$

a) -1 b) -2 c) -3
d) -4 e) -5

12. Sabiendo que :

$z=\frac{a+2i}{b-3i}$; es un número real.

$w=\frac{b+(a+8)i}{a+bi}$; es un número imaginario puro.

Indique : a - b.

a) -12 b) 10 c) 24
d) 8 e) -10

13. Si : $\{z_1 ; z_2\} \subset C$, calcular :

$$\text{Im}\left(\frac{5z_1+z_2}{3z_1+4z_2}\right)-\text{Im}\left(\frac{2z_1-3z_2}{3z_1+4z_2}\right)$$

a) -3 b) -1 c) 1
d) 3 e) 0

14. Si "i" es la unidad imaginaria, al efectuar la siguiente operación :

$$2(1+i)^{16}-(1-i)^{16}$$

a) 0 b) 1 c) -256
d) 512 i e) 256

15. Calcular el valor de : $\sqrt{2i}$.

a) 1 + i b) 1 - i c) -1 - i
d) -1 + i e) a ó c

16. Determinar el módulo de :

$$Z=\frac{(7+3i)(\sqrt{5}-3i)}{(-5+2i)(\sqrt{6}-i)}$$

a) 1 b) 2 c) $\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{7}$ e) 14

17. Sea : $Z_1=2+5i \wedge Z_2=1-i$

Determinar : $58\left(\frac{Z_2}{|Z_1|^2}\right)$

a) 3 + i b) 5 - i c) 4
d) 2 - 2i e) 4i

18. Determinar el módulo de :

$$Z=((1+i)^4+4i)((1-i)^4-4i)(\sqrt{3}i+1)$$

a) 2 b) 8 c) 32
d) 64 e) 128

19. Hallar "n".

$$8+(1-i)^6=n(1+i);n\,\varepsilon R;i=\sqrt{-1}$$

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e)10

20. Hallar el módulo del complejo "Z", si al dividirlo entre 5+ i y al cociente sumarle 2, se obtuvo 3-i.

a) $\sqrt{13}$ b) $2\sqrt{13}$ c) $3\sqrt{13}$
d) $4\sqrt{13}$ e) $5\sqrt{13}$

21. Sean : $Z_1 ; Z_2\, \varepsilon C$. Reducir :

$$\frac{|z_1+z_2|^2-|z_1-z_2|^2}{\text{Re}(\overline{z}_1 . z_2)+\text{Re}(z_1 . \overline{z}_2)}$$

a) 1 b) 1/2 c) 2
d) 3 e) 1/3

22. Indique la parte real de :

$z=(1+i)^2+(1+2i)^2+(1+3i)^2+...+(1+ni)^2$;

$n\,\varepsilon Z^+$.

a) $\frac{n(n+1)}{2}$ b) n c) $\frac{n(2n+5)}{3}$

d) $\frac{n(n+1)}{6}$ e) $\frac{n}{6}(2n+5)(1-n)$

23. Si : $z \varepsilon C$, resolver :

$$|z|-z=3+i$$

Indique : z^{-1}.

a) $2(7+12i)^{-1}$ b) $6(7-24i)^{-1}$

c) $7(6-4i)^{-1}$ d) $-3(4+3i)^{-1}$

e) $7(6-28i)^{-1}$

24. Sean : $|z|=2; |w|=3$.

Hallar : $K=|z+w|^2+|z-w|^2$

a) 36 b) 26 c) 34
d) 18 e) 22

25. Indique el módulo de :

$$W=\sqrt{\frac{(2+2i)(1+3i)}{(1-i)(\sqrt{7}+\sqrt{3}i)}}$$

a) 1 b) $2\sqrt{3}$ c) $\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{2}$ e) 2

26. Sabiendo que : m, n, x, y ε R.

Además : $\sqrt{m+ni}=x+yi$

Hallar el equivalente de :

$$K=\frac{n^2}{my^2+y^4}$$

a) 6 b) 4 c) 8
d) 12 e) 10

27. Si : $\sqrt[3]{a+bi} = m+ni$; $\{a;b;m;n\} \subset R$

además : $i=\sqrt{-1}$.
Calcular :

$$\sqrt{\frac{(m^3-a)(b+n^3)}{m^3n^3}}$$

a) 3 i b) 1 c) -3
d) -3 i e) 3

28. Resolver en :

$$C : z^2 + 2|z| = 0$$

$z \neq (0,0)$. Indique : Re(3z) - Im(z).

a) -3 b) 9 c) 1
d) -2 e) 2

29. Efectuar :

$$\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}}$$

a) 1 + i b) 1 - i c) i
d) $\sqrt{2}\,i$ e) $\dfrac{-1+i}{2}$

30. Hallar "Z", si cumple :

$$\frac{1}{Z}+\frac{1}{\overline{Z}}=\frac{6}{25} \quad \wedge \quad |Z| = 5$$

a) 3 - 4i b) 4 - 3i c) $\dfrac{5}{3+4i}$

d) $\dfrac{5}{3-4i}$ e) $\dfrac{5}{\sqrt{3}}+i$

31. Llevar a su forma trigonométrica :

$$z = -3 - 4i$$

a) $\sqrt{5}$ Cis233°
b) 5 Cis 233°
c) $2\sqrt{2}$ Cis 135°
d) $\sqrt{2}$ Cis 135°
e) 5 Cis 135°

32. Llevar a su forma exponencial :

$$-4+4\sqrt{3}\,i$$

a) $16\,e^{\frac{4\pi}{3}i}$ b) $4\,e^{\frac{2\pi}{3}i}$ c) $4\,e^{\frac{4\pi}{3}i}$

d) $8\,e^{\frac{4\pi}{3}i}$ e) $8\,e^{\frac{2\pi}{3}i}$

33. Efectuar :

$$K = \frac{z_1^5\,z_2^3}{z_3^4}$$

sabiendo que :

$z_1 = \sqrt{2}\,(\text{Cos}10° + i\,\text{Sen}10°)$

$z_2 = \sqrt{8}\,\text{Cis}20°$

$z_3 = 4\text{Cos}5° + 4i\text{Sen}5°$

a) 4 i b) -1/2 c) 1/4
d) i/2 e) 1

34. Sea : $w_1 = -\text{Sen}20° - i\,\text{Cos}20°$, hallar : $\text{Arg}(w_1)$.

a) 190° b) 250° c) 240°
d) 340° e) 200°

35. Efectuar :

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-4i}$$

a) $e^{-\pi}$ b) $e^{-\pi/2}$ c) $e^{\pi/2}$
d) $e^{2\pi}$ e) e^{π}

36. Un número real "x", que satisface la ecuación : $(\text{Senx} + i\text{Cosx})^4 = \text{Senx} - i\text{Cosx}$ es :

a) $\dfrac{\pi}{10}$ b) $-\pi$ c) $\dfrac{\pi}{2}$

d) $\dfrac{\pi}{5}$ e) π

37. Si : $z = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Calcular : $z^{-3}+z^3$.

a) $2e^{\pi i}$ b) $2e^{2\pi i}$ c) $\sqrt{2}\,e^{2\pi i}$

d) $-1+\sqrt{3}\,i$ e) $e^{\frac{2\pi}{3}i}$

38. Reducir :

$$L = \frac{e^{\frac{\pi}{4}i}+e^{-\frac{\pi}{4}i}}{e^{\frac{\pi}{4}i}-e^{-\frac{\pi}{4}i}}$$

a) 1 b) -1 c) i
d) -i e) e

39. Proporcionar un equivalente de : i^i.

a) $e^{-\pi/4}$ b) $e^{-\pi/2}$ c) e^{π}

d) $e^{3\pi/2}$ e) Hay 2 correctas

40. Hallar el módulo de "z" que verifica :

$$e^z = \sqrt[4]{\frac{e^{\pi}}{4}}(1+i)$$

a) $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\pi}{2}$

41. Haciendo :

$$w_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ w_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Determinar : $w_1^{\,n} + w_2^{\,n}$; $n \varepsilon Z$; n = par.

a) $2\text{Cos}\frac{n\pi}{3}$ b) $2\text{Cos}\frac{2n\pi}{3}$

c) $2\text{Sen}\frac{2n\pi}{3}$ d) $2\text{Sen}\frac{n\pi}{3}$

e) $2\text{Cos}\frac{n\pi}{6}$

42. Si : "w" es raíz cúbica de la unidad real, calcular :

$Z = \{(1-w)(1-w^2)\}^{51}\{(1-w^4)(1-w^5)\}^{50}$

a) 3^{100} b) 0 c) 1

d) 2^{101} e) 3^{101}

43. Si : "w" es una de las raíces cúbicas de la unidad real, calcular :

$$E = (w+1)(w^2+1)(w^3+1)(w^4+1)...(w^{6n}+1)$$

a) 4^n b) 2^n c) 8^n

d) 3^n e) 16^n

44. Si : ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 son las cuatro raíces imaginarias de: $\sqrt[5]{1}$, calcular :

$$\text{Im}\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$$

a) 1 b) 0 c) -1
d) Cos (7°) e) Sen (36°)

45. Una de las raíces "Doceavas" del complejo Cis 12°; presenta el mayor argumento, indíquelo :

a) 311° b) 321° c) 361°
d) 391° e) 331°

46. Si : ϕ_0 ; ϕ_1 ; ϕ_2 ; ϕ_3 ; ϕ_4 ; ϕ_5 ; son las raíces de 0rden 6 de la unidad. ¿Qué clase de número es :

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5\ ?$$

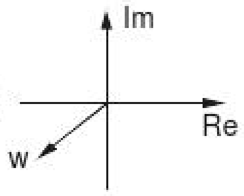
a) Nulo.
b) Real.
c) Imaginario puro.
d) Su módulo es 1.
e) Más de una es correcta.

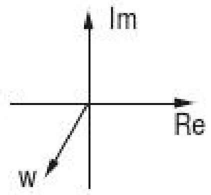
47. Indique el argumento del complejo :

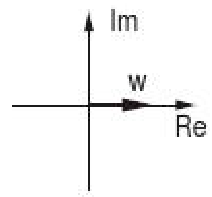
$$w = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2-3i}$$

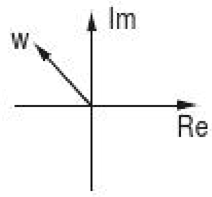
a) $\pi/6$ b) $\pi/2$ c) $2\pi/3$
d) $-\pi$ e) $\pi/4$

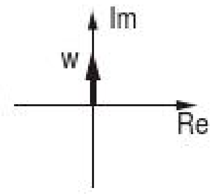
48. Del problema anterior, grafique el complejo:

a) 

b) 

c) 

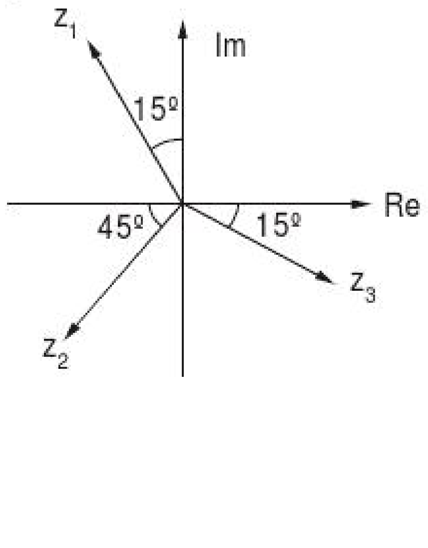
d) 

e) 

49. Calcular "n" en : $(1-w)^{2n} = -2187w$
Siendo "w" una de las raíces cúbicas de la unidad.

a) 1 b) 4 c) 5
d) 7 e) 8

50. Dados los complejos : z_1 ; z_2 ; z_3 en el plano Gausseano :



Indique verdadero (V) o falso (F) :

I. $Arg(z_1 . z_2) = 340°$

II. $Re(z_1) + Im(z_2) > 0$

III. $Arg(z_3) - Arg(z_1) = 240°$

a) FVV b) FVF c) VVV
d) FFF e) FFV

51. Si : a, b y α, son números reales y :

$$\frac{a+bi}{a-bi} = e^{i\alpha}$$

entonces el valor de $Tg\,\alpha$ es :

a) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ b) $\frac{ab}{a^2+b^2}$ c) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$

d) $\frac{ab}{a^2-b^2}$ e) $\frac{a^2-b^2}{2ab}$

52. Hallar el módulo de :

$$z = 1 + Cos74° + i\,Sen74°$$

Sabiendo que : $1 + Cos2\alpha° = 2Cos^2\alpha$

a) 1,7 b) 1,5 c) 1,1
d) 1,6 e) 1,8

53. Hallar el módulo de :

$$z = \sqrt[2+i]{e^{2-i}}$$

a) $e\sqrt[3]{e}$ b) 1 c) $\sqrt[3]{e}$

d) $\sqrt[5]{e^3}$ e) $\sqrt[5]{e}$

54. Si : α y β, son las raíces cúbicas imaginarias de la unidad, el equivalente de :

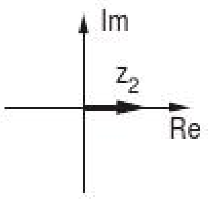
$$K = \alpha^4 + \beta^4 + (\alpha\beta)^{-1}$$

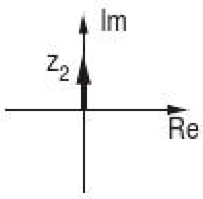
a) 1 b) 2 c) 0
d) 4 e) 6

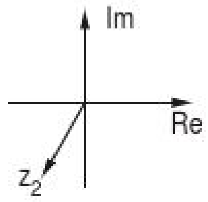
55. Dado el complejo : $z = e^{3+\alpha i}$, donde :

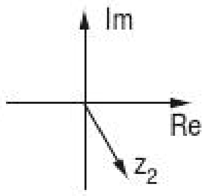
$\alpha \varepsilon < \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{8} >$, indique el complejo :

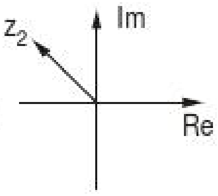
$z_2 = ze^{\beta i - 3}$, donde : $\beta \varepsilon < \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{8} >$.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

56. Hallar el módulo de :

$$w = \sqrt{2}^{\,i-3}(1+i)^{3-i}$$

a) 1 b) $e^{\pi/4}$ c) $\sqrt{2}$
d) $5\pi/4$ e) $3\pi/4$

57. Si "w" es una de las raíces cúbicas imaginarias de la unidad, calcular :

$$(1-w+w^2)(1-w^2+w^4)(1-w^4+w^8)\ldots \text{ 2n factores}$$

a) 1 b) $(-1)^n$ c) 2^n

d) 2^{2n} e) 2^{2^n}

58. Resolver en C :

$$Tg\,z = \frac{3i}{5}$$

a) ln 5 b) ln 3 c) ln 2
d) i ln 3 e) i ln 2

59. Calcular el mínimo valor natural de "n" que verifica la igualdad :

$$\sqrt[n]{\frac{1-i}{1+i}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1);\ i = \sqrt{-1}$$

si éste es de 4 cifras.

a) 1000 b) 1009 c) 1004
d) 1005 e) 1006

60. Reducir :

$$\sqrt{(a+bw)^2 + (b+aw)^2 + (a+bw^2)^2 + (b+aw^2)^2 + 2ab}$$

Si : b > a ; $w = \sqrt[3]{1}$.

a) a + b b) a - b c) b - a
d) 2b - a e) 2a - b

Claves

01.	c
02.	b
03.	c
04.	c
05.	b
06.	d
07.	c
08.	c
09.	b
10.	b
11.	b
12.	e
13.	e
14.	e
15.	e
16.	b
17.	d
18.	d
19.	d
20.	b
21.	c
22.	e
23.	d
24.	b
25.	c
26.	b
27.	e
28.	d
29.	a
30.	a

31.	b
32.	e
33.	d
34.	b
35.	e
36.	c
37.	b
38.	d
39.	e
40.	a
41.	a
42.	e
43.	a
44.	b
45.	e
46.	e
47.	c
48.	d
49.	d
50.	e
51.	c
52.	d
53.	a
54.	c
55.	e
56.	b
57.	d
58.	e
59.	d
60.	c

Capítulo 10

ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

Ecuaciones

Son igualdades condicionales, en las que al menos debe existir una letra llamada incógnita :

Ejemplo : $2x - 1 = 7 + x$

Es una ecuación de incógnita "x".

Solución de una ecuación

Es el valor o valores de la incógnita que reemplazados en la ecuación, verifican la igualdad.

Si la ecuación tiene una sola incógnita a la solución también se le llama raíz.

Ejemplo : $x - 3 = 10$
Solución o raíz : $x = 13$.

Observaciones :

1. Si de los dos miembros de una ecuación se simplifican o dividen, factores que contengan a la incógnita, entonces, se perderán soluciones.
(Esto se evita, si la expresión simplificada se iguala a cero).
Ejemplo :
$$(x+1)(x-1) = 7(x-1)$$
Solución :
Simplificando :
$$(x-1) \Rightarrow x+1 = 7 \rightarrow x = 6$$
para no perder una solución :
$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

2. Si se multiplica ambos miembros de una ecuación por una expresión que contiene a la incógnita, entonces, se pueden introducir soluciones extrañas.
(Esto se evita simplificando previamente).
Resolver :
Ejemplo : $\dfrac{x^2-1}{x-1} = 5$
(x-1) pasa a multiplicar :
$(x^2-1) = 5(x-1)$
resolviendo : $\underbrace{x = 1}_{\text{no verifica}}$ $\quad x = 4$
Manera correcta :
$$\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 5 \rightarrow x = 4$$
única solución

3. Si ambos miembros de una ecuación se elevan a un mismo exponente, entonces, se pueden introducir soluciones extrañas.
Ejemplo : $\sqrt{x^2+7} = x - 7$
Elevando al cuadrado :
$$\cancel{x^2} + 7 = \cancel{x^2} - 14x + 49$$
$x = 3$ (no verifica la ecuación dada)
$\rightarrow$ solución extraña
La ecuación no tiene solución, es incompatible.

Ecuaciones de Primer Grado

Son aquellas ecuaciones que adoptan la forma :

$$\boxed{ax + b = 0}$$

Solución de la ecuación :

En : $ax + b = 0$

solución o raíz : $x = -\dfrac{b}{a}$

Discusión de la raíz

En : $ax + b = 0 \rightarrow$ raíz : $x = -\dfrac{b}{a}$

Entonces :

Si : $a = 0 \quad b = 0 \rightarrow$ Ec. Indeterminada
Si : $a = 0 \quad b \neq 0 \rightarrow$ Ec. Incompatible
Si : $a \neq 0 \rightarrow$ Ec. Determinada.

Ejemplo :

Hallar, "a" y "b", si la ecuación :

$(a - 3)x + b = 5$, es indeterminada.

Solución :

$$x = \frac{5-b}{a-3}$$

si es indeterminada :

$5 - b = 0 \rightarrow b = 5$
$a - 3 = 0 \rightarrow a = 3$

Ecuación de Segundo Grado (Cuadrática)

Forma General :

$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

donde :

x = incógnita, asume dos valores

$a ; b ; \wedge\ c \in R / a \neq 0$

Resolución de la Ecuación :

1. ***Por Factorización*** :

* Resolver la ecuación : $x^2 - x - 6 = 0$

 factorizando :(x-3)(x+ 2) = 0

 ahora : x-3 = 0; x+ 2 = 0

 despejando : x = 3; x = -2

 luego : C.S. = { 3; -2}

* Resolver la ecuación : $4x^2 - 9 = 0$

 factorizando : (2x+ 3)(2x-3) = 0

 ahora : 2x+ 3 = 0; 2x-3 = 0

 despejando : x = -3/2; x = 3/2

 luego : CS = { -3/2; 3/2}

2. ***Por la Fórmula General*** :

Si : $x_1 ; x_2$ son las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$; $a \neq 0$, estas se obtienen a partir de la relación :

$$\boxed{x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

* Resolver la ecuación :

$$3x^2 - 2x - 4 = 0$$

 observar que : a = 3, b = -2 ; c = -4

$$x_{1;2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)}$$

$$x_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{6}$$

$$x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$$

$$\therefore CS = \{\frac{1+\sqrt{13}}{3} ; \frac{1-\sqrt{13}}{3}\}$$

Discriminante (Δ) dada la ecuación cuadrática en "x" :

$$ax^2+bx+c=0 ; a \neq 0$$

se define como :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

* Para la ecuación : $2x^2 - 5x + 1 = 0$
 su discriminante es :

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(1)$$
$$\Delta = 25 - 8$$
$$\Delta = 17$$

Propiedad del Discriminante : el discriminante de una ecuación cuadrática permite decidir qué clase de raíces presenta; es decir :

1. Si : $\Delta > 0$, la ecuación tiene raíces reales y diferentes.
2. Si : $\Delta = 0$, la ecuación tiene raíces reales e iguales.
3. Si : $\Delta < 0$, la ecuación tiene raíces imaginarias y conjugadas.

Relación entre las Raíces y los Coeficientes (propiedades de las raíces) de una ecuación cuadrática : si $x_1 ; x_2$ son las raíces de la ecuación cuadrática en "x".

$$ax^2+bx+c=0 ; a \neq 0$$

se cumple :

1. ***Suma*** : $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2. ***Producto*** : $p = x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

* Para la ecuación :

$$2x^2 - 10x + 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{-10}{2} = 5 \ ; \ x_1 . x_2 = \frac{1}{2}$$

Observación : para determinar la diferencia de las raíces se recomienda utilizar la identidad de Legendre.

$$\boxed{(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2=4(x_1 . x_2)}$$

Casos Particulares : dada la ecuación cuadrática en "x", $ax^2+bx+c=0$; $a \neq 0$ de raíces x_1 ; x_2 , si éstas son :

1. Simétricas, se cumple : $x_1+x_2 = 0$
2. Recíprocas, se cumple : $x_1 . x_2 = 1$

Reconstrucción de la Ecuación Cuadrática en "x":
siendo "s" y "p", suma y producto de raíces, respectivamente, toda ecuación cuadrática en "x" se determina según la relación:

$$\boxed{x^2-sx+p=0}$$

Ecuaciones Cuadráticas Equivalentes :
siendo :

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0$$

se cumple :

$$\boxed{\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}}$$

Ecuaciones Cuadráticas con una raíz común :
Sean :

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0$$

se cumple :

$$\boxed{(ab_1-a_1b)(bc_1-b_1c)=(ac_1-a_1c)^2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Sea la ecuación de incógnita "x".

$$\sqrt{6+\sqrt{m+\sqrt{x}}}=3$$

Si la solución es : x = 49.
Hallar el valor de "m".

a) 4 b) 8 c) 5
d) 13 e) 2

02. Resolver la ecuación si se reduce al primer grado en "x".

$$ax^2+2x+a=5x^2-3ax+4; \quad (a\,\varepsilon R)$$

a) -1 b) -16 c) -15/17
d) -1/17 e) -1/9

03. Si la ecuación :

$$36x - 8 + 4ax + b = 13ax - b + 2$$

Tiene infinitas soluciones.
Hallar : ab.

a) 10 b) 24 c) 20
d) 32 e) 44

04. Resolver las ecuaciones mostradas :

I. $(3x - 1)(x - 8) = (2x + 7)(x - 8)$
Rpta. : ....

II. $x^2(8+x)(x-9)=16(x-9)(x-8)$
Rpta. : ....

III. $x^2+6+\dfrac{1}{x-3}=5x+\dfrac{1}{x-3}$
Rpta. : ....

IV. $2x+\sqrt{x-2}=3x-4$
Rpta. : ....

05. Resolver :

$$\frac{2x-3}{x-1}=\frac{x+4}{x+1}-\frac{1}{x-1}$$

indicando, luego : x^2-1.

a) 0 b) 2 c) 1
d) 3 e) 5

06. Hallar "x" en :

$$\frac{a+1}{x+b}-\frac{a-b}{a-x}=\frac{b+1}{x+b};\ a\neq b$$

a) $\dfrac{a+b}{x+b}$ b) $\dfrac{a-b}{a-x}$ c) $\dfrac{a+b}{2}$
d) $\dfrac{a-b}{2}$ e) $\dfrac{a+b}{ab}$

07. Resolver : $\sqrt{x+2-\sqrt{x-1}}=3$; e indicar la suma de cifras de : 3x + 8.

a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 15

08. Resolver la ecuación :

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{3}}{x}$$

a) 1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{3}$
d) $\dfrac{1}{4}$ e) $\dfrac{1}{5}$

09. De un juego de 32 cartas, se sacan primero "x" cartas y tres más; luego se saca la mitad de lo que resta. Si todavía quedan 10 cartas. ¿Cuántas cartas sacó la primera vez?

a) 9 b) 14 c) 12
d) 8 e) 10

10. En la actualidad, la edad de Pedro es el doble de edad de Juan más 2 años. Hace 3 años la relación de sus edades era como 3 es a 1. Dentro de 5 años, la suma de las edades de Juan y Pedro será :

a) 36 años b) 30 años c) 26 años
d) 20 años e) 18 años

11. Al resolver la ecuación :

$$x^2-\sqrt{x+a}=\frac{44}{x-3}$$

se obtuvo como una de sus soluciones el valor 5, hallar el valor de "a".

a) 3 b) 4 c) 9
d) 16 e) 11

12. Si la ecuación :

$$(3a-4)x^2+2ax+2=ax^2-2x+18$$

Se reduce a una de primer grado en x".
Indicar el valor de "x".

a) $\dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{4}{3}$ c) $\dfrac{8}{3}$
d) $\dfrac{2}{5}$ e) $\dfrac{3}{4}$

13. Calcular : "m.n", si la ecuación :

$$mx+3=\frac{n}{2}(x+1)$$

es compatible indeterminada.

a) 12 b) 18 c) 72
d) 54 e) 45

14. Resolver :

$$2x^2(x-3)(x+4)=(x^2-9)(x+4)$$

e indicar lo correcto :

a) Tiene dos soluciones enteras.
b) Tiene tres soluciones negativas.
c) La mayor solución es 4.
d) Tiene una solución fraccionaria.
e) Tiene tres soluciones.

15. Al resolver la ecuación :

$\frac{2x-4}{x-2}+\frac{3x^2-x}{3x-1}=4$, se obtiene :

a) x = 0 b) x = 2
c) E. Incompatible d) x = 1
e) x = -2

16. Hallar "x", en :

$$\frac{x+m}{m}-\frac{x+n}{n}=\frac{m^2+n^2}{mn}-2$$

a) m + n b) m c) n - m
d) n e) $\frac{(n-m)}{2}$

17. Resolver :

$$\sqrt{x^2+4+4\sqrt[3]{x^3-5x+1}}=x+2$$

a) 3^{-1} b) 2^{-1} c) 4^{-1}
d) 1^{-1} e) 5^{-1}

18. Calcular "x", en :

$$\frac{1}{\sqrt{x}+a}+\frac{1}{\sqrt{x}+b}=\frac{1}{\sqrt{x}-a}+\frac{1}{\sqrt{x}-b}$$

a) a + b b) a - b c) ab
d) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ e) $\sqrt{ab}$

19. El jardinero A planta rosas más rápidamente que el jardinero B, en la proporción de 4 a 3. Cuando B planta "x" rosas en una hora, A planta "x+ 2" rosas. ¿Cuántas rosas planta B en 4 horas?

a) 6 b) 8 c) 32
d) 24 e) 12

20. Los 3/4 de un barril más 7 litros son de petróleo y 1/3 menos 20 litros son de agua.
¿Cuántos litros son de petróleo?

a) 124 b) 142 c) 132
d) 123 e) 134

21. Una de las soluciones de la ecuación mostrada :

$(2a-1)x^2-a(x-b)(x+5)=7b(a+x)$ es 2.

Dar el equivalente de : $E=\frac{a+3b}{b-1}$

a) 3/4 b) 2/3 c) 5/6
d) 1/2 e) 7/8

22. ¿Qué valor admite "a", si la ecuación :

$ax^2-15x-7=0$ tiene una raíz que es igual a -7?

a) 4 b) 5 c) -3
d) -1 e) -2

23. Si la ecuación :

$$ax^3-3x^2+ax-2a=ab-bx-bx^2+2x^3$$

es de primer grado, el valor de "x" es :

a) 2 b) 3/2 c) 1/2
d) -1 e) 5/2

24. Resolver la ecuación de primer grado en "x" :

$$2(a-4x)+ax(3x^2+4)=2(6x^3+5)$$

a) 5^{-2} b) 6^{-2} c) 3^{-2}
d) 2^{-2} e) -2^2

25. ¿Para qué valor de "m" la ecuación :

$$(m^2-5m+6)x=m^{m-1}-3m$$

es compatible indeterminada?

a) 2 b) 3 c) 2 ó 3
d) -2 e) -2 ó -3

26. Hallar el valor de "n" para que la ecuación :

$$(n^2+10)x+n^{n-2}=7nx+n-1$$

sea incompatible.

a) 8 b) 5 c) 2
d) 7 e) Dos anteriores son correctos.

27. Indicar la suma de soluciones de :

$$x^2(x-5)+\frac{\sqrt{2-x}}{x-4}=16(x-5)+\frac{\sqrt{2-x}}{x-4}$$

a) 5 b) 9 c) -1
d) 1 e) -4

28. Indicar el cociente entre la mayor y menor de las soluciones de :

$$\frac{1}{x^2-3x-10}+(x-6)(x+2)=x^2(x+2)(x-6)+\frac{1}{x^2-3x-10}$$

a) 5 b) 9 c) -1
d) 1 e) -6

29. La ecuación : $\frac{x+1}{x-3}+\frac{x+5}{x-2}=\frac{2x^2-x-11}{x^2-5x+6}$

tiene como conjunto solución a :

a) {3} b) {1} c) {2}
d) {-3} e) { }

30. En la siguiente ecuación, determinar el valor de "y", si: x = 1.

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-1}+\frac{2y^2-y-1}{y^2-1}=\frac{5}{2}$$

a) 1 b) 0,1 c) 0
d) Indeterminado. e) 2

31. Hallar el valor de "x", en :

$$\frac{x-2}{x-3}+\frac{x-3}{x-4}-\frac{2x-8}{x-5}=0$$

a) 7/13 b) 11/3 c) 3/11
d) 5/13 e) 6/13

32. Resolver :

$$\frac{a}{b}(1-\frac{a}{x})+\frac{b}{a}(1-\frac{b}{x})=1$$

a) a + b b) a - b c) a
d) b e) ab

33. Hallar "x" de la ecuación :

$$b+\frac{a^2-\frac{b}{x-\frac{a}{b}}}{a+b}=a$$

a) $\frac{a+1}{b}$ b) c) $\frac{ab+1}{b}$

d) e) $\frac{b}{a+1}$

34. Resolver la ecuación :

$$\sqrt{9x+\sqrt{x}}=3\sqrt{x}+\frac{1}{7}$$

a) $\frac{1}{7}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\frac{1}{49}$

d) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ e) 49

35. Resolver : $\sqrt{x-3+\sqrt{3x+4}}=3$

Dar como respuesta : 2x + 1.

a) 41 b) 21 c) 15
d) 20 e) $\sqrt{3}$

36. Resolver :

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x+2\sqrt{2}-5}$$

a) 2 b) 3 c) 4
d) 1 e) 5

37. Tres niños se han repartido una bolsa de caramelos, el primero la mitad de los caramelos y uno más, el segundo la tercera parte de lo que quedó y el tercero el resto.
¿Cuántos caramelos hubo en la bolsa?

a) 25 b) 32 c) 38
d) 14
e) No puede ser determinado.

38. Habiendo perdido un jugador la mitad de su dinero, volvió al juego y perdió 1/2 de lo que le quedaba; repitió lo mismo por tercera y cuarta vez, después de lo cual le quedaron 6 soles. ¿Cuánto dinero tenía al comenzar el juego?

a) 94 b) 84 c) 72
d) 96 e) 86

39. Los ahorros de un niño constan de :
(P + 1), (3P - 5) y (P + 3) monedas de 5, 10 y 20 centavos, respectivamente. ¿A cuánto ascienden sus ahorros, si al cambiarlo en monedas de 25 centavos, el número de monedas obtenidas es el doble del número de monedas de 5 centavos?

a) 800 b) 455 c) 345
d) 400 e) 360

40. Se compran cajones de naranjas a 100 soles cada uno; cada cajón contiene 20 kilos, primero se vende la mitad a 20 soles el kg, después la cuarta parte a 15 soles el kg, y por último el resto se remata a 10 soles el kg, ganando 11,250 en total. ¿Cuántos cajones de naranjas se habían comprado?

a) 65 b) 70 c) 55
d) 50 e) 60

41. Si : "γ" es una raíz de la ecuación : $x^2+x=1$

Calcular : $\frac{\gamma^5+8}{\gamma+1}$

a) 5 b) -5 c) 3
d) -3 e) 1

42. Dada la ecuación indeterminada en "x":

$$a(x+2)=\frac{1}{3}\left[b(2x+5)-c\right]$$

Calcular el valor numérico de:

$$R=\frac{a^3-b^3+c^3}{abc}$$

a) $\left(\frac{5}{8}\right)^3$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ c) $\left(\frac{5}{2}\right)^2$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

43. Calcular el valor de "n" a partir de la ecuación incompatible en "x":

$$n(x-1)+7=\frac{1}{n}(4x+10)$$

Dar como respuesta : $\frac{1}{n}+n^2$.

a) 9/2 b) $\frac{7}{2}$ c) -2

d) -5/2 e) 5/2

44. Si la ecuación :

$$\frac{nx+15}{5}-\frac{6n+5}{2n}=\frac{x-12}{2}+5$$

Presenta solución única en "x".
Calcular los valores que adopta "n"

a) $R-\left\{\frac{3}{2}\right\}$ b) $R-\{0;1/3\}$

c) $R-\{1/3;3/2\}$ d) $R-\{1/3\}$

e) $R-\{0;5/2\}$

45. De la ecuación de primer grado mostrada:

$$(n+1-5x^{n+5})x=n(x^{n+6}-1)$$

Calcular la suma de posibles valores que adopta "x".

a) $-\frac{9}{4}$ b) $-\frac{2}{5}$ c) -2

d) $-\frac{7}{5}$ e) $-\frac{49}{20}$

46. Al resolver la ecuación:

$$\frac{2x^2+5x-17}{2x^2+17x-15}+\frac{2x^2+17x-15}{2x^2+5x-17}=2$$

a) Hay 2 valores para x.
b) x es par.
c) x es negativo.
d) x es positivo.
e) Hay 2 correctas.

47. Luego de resolver :

$$\frac{4}{3x-2}+\frac{2}{3x^2-2x}=\frac{4}{x}+\frac{5x-6}{2x-3x^2}$$

Se afirma :
I. El conjunto solución = {2/3}.
II. La ecuación es compatible indeterminada.
III. La ecuación es inconsistente.

a) VVV b) FFV c) VFV
d) FFF e) VVF

48. Sabiendo que: $b\neq c \wedge b\neq a\neq \pm c$
Resolver :

$$\frac{\frac{x}{a+b}-a}{b-c}+\frac{\frac{x}{a+b}-c}{b-a}=\frac{\frac{x}{a+b}+b-3(a+c)}{a+c}$$

a) (a+ b) (a+ b-c) b) (a+ b) (a-b-c)
c) (a-b) (a+ b-c) d) (a+ b) (a-b+ c)
e) (a+ b) (-a-b-c)

49. Resolver la ecuación :

$$\frac{x+mab+nbc}{pac}+\frac{x+mab+pac}{nbc}+$$

$$\frac{x+pac+nbc}{mab}-\frac{qx}{mab+nbc+pac}=q-3$$

Determinar el denominador positivo de dicha raíz.

a) 2 b) mab + nbc + pac
c) mnp d) 1
e) a + b + c

50. Hallar el valor de "x".

$$a(x+b)=x+\sqrt[3]{xb^2}-\sqrt[3]{x^2b}$$

a) $\frac{b}{1-a^3}$ b) $\frac{b^3}{(1-a)^2}$

c) $\frac{a^3b}{(1-a)^2}$ d) $\frac{a^3b}{(1-a)^3}$

e) $\frac{a-b}{(a+b)^3}$

51. Luego de resolver :

$$\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}=\frac{4x-a}{2a}$$

Señale : x^2+ax+a^2

a) $\frac{25}{16}a^2$ b) $\frac{61}{16}a^2$ c) $\frac{5}{4}a^2$

d) $\frac{9}{16}a^2$ e) $\frac{61}{25}a^2$

52. Resolver en "x" :

$$\frac{a^2-(ax+b)}{a-\sqrt{ax+b}}=\sqrt{a(x+3a)+b}\ ;a>b>0$$

a) $\left\{\frac{a^2-b}{a}\right\}$ b) $\left\{\frac{a-b^2}{a}\right\}$

c) $\left\{\frac{a-b}{a}\right\}$ d) $\left\{\frac{a^2-b}{b}\right\}$

e) ϕ

53. Si las soluciones de :

$$\frac{(nx-1)+(x+m)}{(mx+1)+(n-x)}=\frac{(nx+1)+(m-x)}{(mx-1)+(n+x)}$$

son α y β tales que : $\alpha<\beta$.

Hallar : $3\alpha-2\beta^2$.

a) -5 b) 2 c) -1
d) -3 e) 1

54. Resolver :

$$\frac{(a+b)x^2-(a^2+b^2)x-2abx+ab(a+b)}{(a-b)x^2-(a^2+b^2)x+2abx-ab(a-b)}=$$

$$\frac{a^2+ab-a-b}{a^2+a-b-ab}$$

a) - a b) - b c) ab

d) $-\frac{a}{b}$ e) a + b

55. Al resolver la ecuación :

$$\frac{\sqrt[45]{8+x}}{8}+\frac{\sqrt[45]{8+x}}{x}=\frac{\sqrt[45]{x}}{2}$$

se obtiene : $\frac{2a}{\sqrt[b]{a^c}-1}$

Indicar el valor de : a + b - c.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

56. Resolver, para "x" :

$$\sum_{K=1}^{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)^K+\frac{1}{x^{n+1}(x-1)}=\frac{1-n}{n}$$

a) $\frac{n}{n-1}$ b) $\frac{2n}{n+1}$ c) $\frac{2n}{n-1}$

d) $\frac{1}{1-n}$ e) $\frac{n}{n+1}$

57. Un comerciante tenía una determinada suma de dinero. El primer año gastó 100 pesos y aumentó a lo que quedaba un tercio de este resto. Al año siguiente, volvió a gastar 100 pesos y aumentó a la cantidad restante un tercio de ella.
El tercer año gastó de nuevo 100 pesos y agregó la tercera parte de lo que quedaba. Si el capital resultante es el doble del inicial. ¿Cuál fue el capital inicial?

a) 1480 b) 1500 c) 1400
d) 2380 e) 2000

58. Se reparten S/. 3000 entre cuatro personas, de tal manera, que a la primera le corresponda S/. 400 más que a la segunda; a ésta, 3/5 de lo que le corresponde a la tercera, y a ésta S/. 600 más que a la cuarta persona. ¿Cuánto recibió la segunda persona?

a) S/. 500 b) S/. 490 c) S/. 575
d) S/. 600 e) S/. 800

59. Una librería tiene, para la venta, un cierto número de libros. Vende primero las 3/5 partes y después le hacen un pedido de los 7/8 de lo que le queda, pero antes de servir este pedido se le inutilizan 240 libros y por lo tanto, enviando todos los libros útiles que le quedan, sólo cubre los 4/5 de la cantidad pedida. ¿Qué cantidad de libros se vendieron?

a) 2000 b) 3000 c) 1760
d) 3520 e) 2240

60. ¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡Oh milagro! cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia. Había transcurrido además una duocécima parte de su vida, cuando de velo cubrióse su barbilla. Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito, que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan sólo la mitad de la de su padre. Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años el deceso de su hijo.
Dime cuántos años había vivido Diofanto cuando le llegó la muerte?

a) 99 b) 95 c) 84
d) 86 e) 90

Claves

01.	e
02.	d
03.	c
04.	-
05.	d
06.	d
07.	b
08.	d
09.	a
10.	a
11.	e
12.	c
13.	b
14.	d
15.	d
16.	c
17.	e
18.	c
19.	d
20.	a
21.	b
22.	e
23.	a
24.	d
25.	b
26.	b
27.	e
28.	e
29.	e
30.	c

31.	b
32.	a
33.	a
34.	c
35.	c
36.	c
37.	b
38.	d
39.	d
40.	d
41.	a
42.	e
43.	b
44.	e
45.	e
46.	c
47.	d
48.	d
49.	d
50.	d
51.	b
52.	e
53.	a
54.	c
55.	c
56.	d
57.	a
58.	d
59.	c
60.	c

Capítulo 11

ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

Teorema Fundamental del Álgebra

Toda ecuación polinomial P(x) = 0, donde P(x) es un polinomio de cualesquiera coeficiente numérico de grado mayor que la unidad, tiene por lo menos una raíz generalmente compleja.

Corolario : Toda ecuación polinomial de grado "n" tiene exactamente "n" raíces.

* $x^2-x+5=0$ tiene 2 raíces

* $x^7+x=1$ tiene 7 raíces

Teorema de Cardano - Viette :
Dada la ecuación polinomial de grado "n", cuya estructura es :

$$a_ox^n+a_1x^{n-1}a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+...+a_n=0$$

si sus raíces son :

$$x_1;x_2;x_3;.....\wedge x_n$$

se cumple :

1. Suma de raíces :

$$x_1+x_2+x_3+...+x_n=-\frac{a_1}{a_o}$$

2. Suma de productos binarios :

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_o}$$

3. Suma de productos ternarios :

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+...+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_3}{a_o}$$

En general, si " s_k " representa la suma de los productos de las raíces tomadas de "k" en "k", se cumple :

$$\boxed{s_k=(-1)^k.\frac{a_k}{a_o}}$$

Veamos un ejemplo para la ecuación :

$$2x^3+5x^2+10x-1=0$$

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{5}{2}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{10}{2}=5$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$$

Teoremas Adicionales :

1. Paridad de raíces imaginarias :
Sea P(x) = 0 una ecuación polinomial, donde P(x) es un polinomio de coeficientes reales, si una raíz de la ecuación es el número imaginario a+ bi, otra raíz será a-bi.

2. Paridad de raíces irracionales :
Sea P(x) = 0 una ecuación polinomial, donde P(x) es un polinomio de coeficientes racionales, si una raíz de la ecuación es el número irracional :
$a+\sqrt{b}\,/\,a\,\varepsilon Q\wedge\sqrt{b}\,\varepsilon Q'$, entonces, otra raíz será : $a-\sqrt{b}$.

Ecuación de Tercer Grado : (cúbica)

Forma general :

$$\boxed{ax^3+bx^2+cx+d=0}\ ...(1)$$

Donde :
x = incógnita, asume tres valores :
$a,b,c\wedge d\,\varepsilon R\,/\,a\neq 0$

Si en la forma general se sustituye "x" por $x-\frac{b}{3a}$, se obtiene la siguiente ecuación :

$$\boxed{x^3+px+q=0}\ ....(2)$$

cuyo discriminante se denota por D y se define según la relación :

$$D=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2$$

Con lo cual las raíces de (2) se obtienen según :

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}.W + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}.W^2$$

$$x_3 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}.W^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}.W$$

siendo : $W = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \,/\, i = \sqrt{-1}$

Observación : Es recomendable utilizar el proceso anterior siempre y cuando la ecuación dada no pueda resolverse por factorización.

Ecuación Bicuadrada : Es aquella ecuación polinomial de cuarto grado que presenta la siguiente forma :

$$\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0}$$

Donde :

x = incógnita, asume cuatro valores

$a, b \wedge c \,\varepsilon\, R \,/\, a \neq 0$

Teorema del Conjunto Solución

Toda ecuación bicuadrada :

$ax^4 + bx^2 + c = 0$, donde "m" y "n" son dos raíces no simétricas presenta por conjunto solución.

$$\boxed{CS = \{m, -m, n, -n\}}$$

Propiedad de las Raíces : Siendo "m" y "n" las raíces no simétricas de la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, se cumple :

I. $\boxed{m^2 + n^2 = -\frac{b}{a}}$

II. $\boxed{m^2 . n^2 = \frac{c}{a}}$

Reconstrucción de la ecuación bicuadrada en "x":

Siendo "m" y "n" las raíces no simétricas, tenemos:

$$\boxed{x^4 - (m^2 + n^2)x^2 + m^2n^2 = 0}$$

Ecuación Binomia

Forma general :

$$\boxed{ax^n + b = 0}$$

Donde :
x = incógnita, asume "n" valores.
$a \wedge b \,\varepsilon\, R \,/\, a \neq 0 \wedge b \neq 0$

Observación : Para resolver una ecuación binomia, se podrá aplicar algún producto notable, cierto criterio de factorización o la radicación de los números complejos.

Ecuación Trinomia

Forma general :

$$\boxed{ax^{2n} + bx^n + c = 0}$$

Donde :
x = incógnita, asume "2n" valores.
$n \,\varepsilon\, N \,/\, n \geq 2$
$a \wedge b \wedge c \,\varepsilon\, R \,/\, a \neq 0, b \neq 0 \wedge c \neq 0$

Observación : Para resolver una ecuación trinomia se recomienda que, en la forma general, se realice el siguiente cambio : x^n por "y", con lo cual la ecuación sería :

$$ay^2 + by + c = 0$$

Donde los valores de "y" se podrían obtener, según los criterios vistos en la resolución de una ecuación cuadrática, para finalmente resolver la siguiente ecuación binomia :

$$x^n = y$$

Ecuación Recíproca : P(x) = 0, será una ecuación recíproca, si P(x) es un polinomio cuyos coeficientes de sus términos equidistantes son iguales.

Ejemplos :

* $2x^2 + 5x + 2 = 0$
* $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$
* $5x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 2x + 5 = 0$
* $4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$

Propiedades :

1. En toda ecuación recíproca, se cumple que si : $r \neq 0$ es una raíz, entonces, otra raíz será $\frac{1}{r}$.

2. Toda ecuación recíproca de grado impar acepta como raíz a 1 ó -1.

3. Si : P(x) = 0 es una ecuación recíproca de grado "n", se verifica lo siguiente :

$$\boxed{P(x) \equiv x^n . P(\frac{1}{x})}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Indicar la suma de la mayor raíz positiva con la mayor raíz negativa que se obtiene al resolver :

$$36x^4 - 148x^2 + 16 = 0$$

a) 0 b) 11/6 c) 5/3
d) -11/6 e) -5/6

02. Formar una ecuación bicuadrada que tenga por dos de sus raíces : $a - 2\sqrt{3}$ y 5.

a) $x^4 + 42x^2 + 280 = 0$
b) $x^4 - 40x^2 + 390 = 0$
c) $x^4 - 37x^2 + 300 = 0$
d) $x^4 - 42x^2 + 280 = 0$
e) $x^4 + 37x^2 + 280 = 0$

03. Indicar la suma de coeficientes de una ecuación bicuadrada de raíces :

$x_1 ; x_2 ; x_3$ y x_4.

Si : $x_1 = 2$ y, $x_2 . x_3 . x_4 = 32$.

a) 84 b) 85 c) 45
d) 95 e) 44

04. Calcular "k" en la ecuación bicuadrada. $ax^4 + 48x^2 + k = 0$, si las 4 raíces de la ecuación cumplen con :

$$x_1 = x_3 ; (x_2 x_4)^{-1} + (x_1 x_3)^{-1} = 12$$

a) 4 b) – 4 c) – 2
d) 2 e) 10

05. Determinar la suma de las raíces racionales del polinomio :

$$P(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 - x - 12$$

a) – 2 b) 0 c) – 1
d) 1 e) 2

06. El siguiente polinomio :

$$P(x) = x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 21x + 9$$

presenta :

a) 5 raíces diferentes.
b) 2 raíces de multiplicidad 2.
c) 1 raíz de multiplicidad 2 y otra de multiplicidad 3.
d) 1 raíz de multiplicidad 4.
e) 1 raíz de multiplicidad 5.

07. Si la ecuación :

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$$

tiene dos raíces reales. ¿Qué relación existe entre a y b, sabiendo que : $a < 0$?

a) $|b| + 2a \geq 0$ b) $|b| > |2a|$
c) $|b| - 2a \geq 0$ d) $|b| + 2a < 0$
e) $a + b = 0$

08. Indicar la suma de los cuadrados de los ceros no racionales de la ecuación :

$$x^3 + 2x^2 - 7x - 2 = 0$$

a) 14 b) 13 c) 10
d) 5 e) 2

09. Formar la ecuación de menor grado posible con raíces: 2, 5 y 3.

a) $x^3 + 10x^2 - 30x + 60 = 0$
b) $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$
c) $x^3 + 31x^2 - 30x - 60 = 0$
d) $2x^3 + 62x - 20x^2 - 60 = 0$
e) $x^3 + 12x^2 - 15x - 30 = 0$

10. Construir la ecuación con coeficientes racionales de grado mínimo que tenga como raíces los números : 1; $1 + \sqrt{2}$; 3i.
Dar como respuesta el coeficiente de su término lineal.

a) 1 b) 5 c) 7
d) 9 e) 12

11. Si : 1-i, es raíz de :

$$x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10 = 0$$

entonces, la suma de las otras raíces es :

a) 4 – i b) 3 + i c) 1 – 4i
d) 1 + 2i e) 4

12. Hallar los valores reales a y b, de modo que : 1-i sea una raíz de la ecuación $x^5 + ax^3 + b = 0$.
Indicar su suma.

a) 8 b) 6 c) 9
d) 10 e) 7

13. Sean :
$P(x)$: el polinomio de menor grado con coeficientes racionales que tiene a : $\sqrt{3}$ y $1+i$, como raíces simples.
$Q(x)$: el polinomio de menor grado con coeficientes reales que tiene a : $\sqrt{3}$ y $1+i$, como raíces simples.
Luego, podemos decir :

a) Grado (P) = Grado(Q)
b) Grado (P) < Grado (Q)
c) Grado (P) > Grado (Q)
d) Grado (P) = 3
e) Grado (Q) = 4

14. Si : $a^{1/3}-a^{-1/3}$ es una de las raíces de la ecuación $x^3+3x+c-a=0$ entonces, el número "c" es igual a:

a) $2a$ b) a^{-2} c) a^{-1}
d) $a^{-1/3}$ e) a^{-2}

15. Formar la ecuación de menor grado posible con coeficientes racionales enteros y de menor valor absoluto, tal que admita como dos de sus "ceros" : $3-\sqrt{2}$; i.
Indicar el término cuadrático de dicha ecuación.

a) $-6x^2$ b) $8x^2$ c) $2x^2$
d) $-5x^2$ e) $4x^2$

16. Si la ecuación :
$$x^2-2x+2005=0$$
tiene como conjunto solución $\{\alpha;\beta\}$.
Calcular :
$$\left[\left(\alpha+\frac{2005}{\alpha}\right)^{\left(\beta+\frac{2005}{\beta}\right)}\right]^{(\alpha+\beta)}$$

a) 4 b) 2 c) 8
d) 16 e) 32

17. Señale el valor de verdad de las proposiciones :

I. Si : x = 1, es una raíz de
$x^3+(m-1)x^2+(3m-1)x-19=0$,
entonces, m = 4.
II. Si : x_o es una raíz de $x^3=x+3$, entonces el valor de : $T=\dfrac{2x_o^3-5}{2x_o+1}$ es 1.
III. Si P es un polinomio de quinto grado con coeficientes reales que tiene como raíces a "2i" y a "i", entonces, la gráfica de P corta al eje "x" en un punto.

a) VVV b) FVV c) VVF
d) FVF e) VFV

18. Si : x_1 ; x_2 y x_3 son las raíces de la ecuación : $x^3+7x-5=0$.

Calcular : $x_1^2-\dfrac{5}{x_1}+x_2^2-\dfrac{5}{x_2}+x_3^2-\dfrac{5}{x_3}$

a) 0 b) – 7 c) – 14
d) – 21 e) 10

19. Dada la ecuación : $\dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{2+x}{x}$

Donde "x_o" es una solución :

Hallar : $E=\dfrac{x_o{}^4+2x_o+6}{x_o+1}$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

20. Calcular el valor de "m", sabiendo que las raíces de :
$$4x^3-24x^2+mx+18=0$$
son :
$x_1=\alpha+\beta$
$x_2=\alpha$
$x_3=\alpha-\beta$

a) 18 b) 21 c) 23
d) 25 e) 27

21. Si, a, b y c; son las raíces de la ecuación :
$$x^3+x+k^2+1=0$$
Calcular el valor de :
$$\frac{(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3+6abc}{abc}$$

a) 3 b) 3k c) 0
d) k^2 e) 6

22. En la ecuación :
$$x^3+ax^2+ax+m=ax^2$$
una raíz es el doble del negativo de la otra, luego, se cumple :

a) 2a = -3m b) 3a = -2m
c) $4a^3=-27m^2$ d) $27a^3=-4m^2$
e) 3a = 2m

23. Si dos raíces de la ecuación :
$2x^3-4x^2+(m^2+1)x-m+2=0$, suman 3.

Indicar el valor de : $m+\dfrac{5}{m}$

a) 2 b) – 2 c) – 1
d) 1 e) 0

24. Si una de las raíces de la ecuación:

$$3x^3 - 18x^2 + ax - 60 = 0 \quad (a \varepsilon R)$$

es la media aritmética de las otras 2.
Calcular la suma de las inversas de estas 2 raíces.

a) 1/5 b) 2/5 c) 3/5
d) 4/5 e) 1

25. Sean x_1; x_2 y x_3 las raíces de la ecuación:
$x^3 + 4ax + b - 2004 = 0$; $a < 0$
Además: $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$.
Dar como respuesta una de sus raíces.

a) 2004 b) $\sqrt{-a}$ c) $-2\sqrt{-a}$
d) 2a – 1 e) $2\sqrt{a}$

26. Hallar la relación entre "p" y "q", para que la ecuación:
$x^3 + 3px + q = 0$; $pq \neq 0$, tenga una raíz doble.

a) $q^3 + 2p = 0$ b) $q^3 + 4p^2 = 0$
c) $p^2 + q^3 = 0$ d) $4p^3 + p^2 = 0$
e) $q^2 + 4p^3 = 0$

27. Dado :
$F(x) = ax^5 + (b - ac)x^4 - bcx^3 - (a - bc)x - bx^2 + ac$
Además : F(c) = 0. Señalar la relación correcta para que las otras raíces sean reales.

a) 2c = a + b b) 2a = b + c c) 2b = a + c
d) $|b| \geq 2|a|$ e) $|a| \geq 2b$

28. Si : a, b y c; son raíces de la ecuación :

$$2x^3 - 6x^2 + 7x + 1 = 0$$

Calcular : $a^2 + b^2 + c^2$.

a) 14 b) 30 c) 43
d) 5 e) 2

29. A partir de la ecuación polinomial :

$$x^3 - (n+3)x^2 - (n+1)x + n^2 + 1 = 0$$

Calcular el valor de "n", tal que la expresión:
$K = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ adopte su mínimo valor. Siendo : x_1, x_2, x_3, raíces de la ecuación.

a) – 2 b) 5 c) – 5
d) 3 e) – 4

30. En la ecuación polinomial :
$x^3 + (m+2)x^2 + (m^2 - 3)x + m^3 + 2 = 0$
de raíces : x_1, x_2, x_3.
Calcular el valor de "m", de tal manera que la expresión: $A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
tenga el máximo valor.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

31. Sean : x_1; x_2 y x_3; raíces de la ecuación :

$$x^3 - 5x + 7 = 0$$

Calcular el valor de :

$$E = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$$

a) – 155 b) – 165 c) – 175
d) – 180 e) – 200

32. Las raíces de :

$$P(x) = x^3 - kx^2 + 92x + n$$

están en la relación :

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{5}$$

Hallar el valor de : k + n.

a) 138 b) 240 c) 136
d) 156 e) 102

33. Las raíces de la ecuación : $x^3 - 3x - 1 = 0$
son, a, b, c. Calcular :

$$S = f(a) + f(b) + f(c)$$

Siendo : $f(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 1)^2}$

a) 1 b) 3 c) 1/3
d) 9 e) 12

34. ¿Cuántas raíces no numéricas presenta la ecuación en "x" ?

$$x^4 + (a+b)x^3 + (ab-1)x^2 - (a+b)x - ab = 0$$

a) Ninguna. b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

35. Calcular, b–a, si : $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ es una raíz de la ecuación :
$x^7 + ax + b = 0$.

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

36. Si dos raíces de la ecuación :

$$3x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - 30 = 0$$

de coeficientes racionales son :
$\sqrt[3]{5}$; $1 + i$
Calcular el valor de :

$$E = \sqrt{\left|\frac{BC - AD}{3}\right| - 2}$$

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3}$
d) $2\sqrt{2}$ e) 6

37. Si "P" es un polinomio completo definido por : $P(x) = x^5 + ... + 15$ y la ecuación : $P(x) = 0$ tiene a $\sqrt[3]{-3}$ y a $\dfrac{5}{2+i}$ como raíces, entonces, la sexta parte del resto de dividir. $P(x)$ entre $(x^3 - 3)$ es :

a) $x^2 - 3x + 2$ b) $x^2 - 4x - 6$
c) $x^2 - 4x + 1$ d) $x^2 - 4x - 5$
e) $x^2 - 4x + 5$

38. Transformar la ecuación cúbica :

$$2x^3 + 3x^2 - 7x + 1 = 0$$

en otra cúbica que carezca de término cuadrático.

a) $3x^3 - 2x + 4 = 0$ b) $48x^3 - 24x + 1 = 0$
c) $5x^3 - 2x + 3 = 0$ d) $4x^3 - 17x + 10 = 0$
e) $3x^2 - 2x - 4 = 0$

39. ¿Qué valor debe asumir "n" para que las raíces de la ecuación : $x^4 - nx^2 + 9 = 0$; se diferencien en una constante "K" ?

a) ± 10 b) ± 11 c) ± 12
d) ± 13 e) ± 14

40. Hallar los valores de "α", para que la ecuación :

$$x^4 + (1-\alpha)x^2 + (2\alpha - 6) = 0$$

tenga sólo 2 raíces reales, dar como respuesta el mayor valor entero negativo que asume "α".

a) –4 b) –3 c) –8
d) –1 e) –2

41. Determinar el coeficiente "a", de tal modo que el número (-1) sea una raíz múltiple de orden no inferior a 2 del polinomio.

$$f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$$

a) 5 b) 6 c) – 5
d) – 6 e) 4

42. Sabiendo que :

$$a^3 + ma + n = 0$$
$$b^3 + mb + n = 0$$
$$c^3 + mc + n = 0$$

Calcular el valor de :

$$\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(\frac{m}{3})^3 + (\frac{n}{2})^2}$$

a) –4 b) –27 c) –54
d) –12 e) –108

43. Si el conjunto solución de la ecuación : $5x^3 + 3x^2 + 5 = 0$; es $\{a; b; c\}$. entonces, el valor de :

$$\frac{ab(a^2b^2-1) + bc(b^2c^2-1) + ca(c^2a^2-1) + 5a^3 + 3a^2}{abc}$$

a) – 2 b) 2 c) 1
d) – 1 e) 0

44. Calcular la suma de los valores que admite "a", para que la ecuación :

$$x^3 + (1-a)x^2 + (7-2a)x + 18 = 0$$

admita dos soluciones.

a) – 2 b) – 9,5 c) 7,5
d) 2 e) 13,5

45. Si la ecuación : $6x^4 - x^3 + ax^2 - bx + 2 = 0$; admite dos raíces imaginarias conjugadas : m+ ni; m-ni; tal que la suma es 3 y dos raíces racionales. Calcular la suma de las raíces racionales.

a) 1 b) 5/6 c) 1/3
d) – 1 e) – 17/6

46. En la ecuación polinomial :

$$x^3 + 2x^2 + bx - 4 \equiv 0$$

el cuadrado de la única raíz positiva es igual a la diferencia de los cuadrados de las otras dos. Señalar dicha raíz.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) 2
d) 3 e) 5

47. Indicar una raíz de la ecuación :

$$x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 - bc)x + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

siendo : a, b, c, εR .

a) a+ b+ c b) a–b+ c c) a+ b–c
d) –a+ b-c e) –a–b–c

48. ¿Cuál es la relación que deberá existir entre a, b y c; para que las ecuaciones : $ax^5 + bx + c = 0$; $cx^5 + bx + a = 0$; $a \neq c$, tengan sólo una raíz común?

a) $(a+b)^5 - c^5$
b) $(a-b)^5c^5 + b^5 = 0$
c) $(a+b)^5 + c^5 = 0$
d) $(a+c)^5 - b^5 = 0$
e) $(a+c)^5 + b^5 = 0$

49. Si las ecuaciones :

$$ax^3+3bx^2+c=0$$
$$bx^3+3cx+d=0$$

tienen una sola raíz común, calcular : $\dfrac{(ad-4bc)^3}{(ac^2+b^2d)^2}$

a) 9 b) 12 c) 27
d) 32 e) 36

50. Hallar las raíces r_1, r_2, r_3, y r_4 de la ecuación :

$$4x^4-ax^3+bx^2-cx+5=0$$

sabiendo que son reales, positivas y que:

$$\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}+\frac{r_3}{5}+\frac{r_4}{8}=1$$

Señalar la suma de dichas raíces :

a) 19/4 b) 17/4 c) 21/4
d) 13/4 e) 15/4

51. Si las raíces : x_1, x_2, x_3, x_4, de la siguiente ecuación:

$$x^4+mx^3+nx^2+px+864=0$$

son reales y positivas; además :

$$x_1+2x_2+3x_3+4x_4=48$$

Dar como respuesta la suma de raíces.

a) 3 b) 9 c) 17
d) 25 e) 36

52. Sean : a y b dos números reales para los cuales, la ecuación : $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ tiene al menos una solución real. Para todos los pares (a; b), encontrar el máximo valor de : (a^2+b^2).

a) 3/4 b) 4/5 c) 7/8
d) 1/2 e) 2/3

53. Indicar la suma de las raíces no imaginarias, de la siguiente ecuación :

$$x^6-18\sqrt{2}\,x^3+64=0$$

a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{2}$ e) $5\sqrt{2}$

54. ¿Cuántas raíces reales tiene la ecuación?

$$x^4-2x-1=0$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) Ninguna.

55. Dada la ecuación :

$$\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$$

Calcular la suma de sus raíces, si dos de ellas son "m" y "n", $m\neq n$.

Siendo, además : $m + n = -m \cdot n = 10$.

a) 0 b) 3 c) 8
d) 1 e) 2

56. Dada la ecuación :

$$x^{15}+2x+a=0\,;\ a>0$$

Se afirma :
I. Tiene dos raíces reales.
II. Tiene raíz negativa.
III. No tiene raíces reales.

Se concluye :

a) FFF b) VVV c) FVF
d) VVF e) FFV

57. Si : $\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\ldots\ldots\alpha_n$ son las raíces de la ecuación polinomial.

$$x^n-2x^2+3x+1=0$$

Proporcionar un valor de :

$$t=\prod_{k=1}^{n}(\alpha_K-2)$$

a) - 1 b) 2n - 3 c) 2n + 3
d) 2^n - 1 e) 2^n + 1

58. Sea la ecuación polinomial :

$$3x^{125}-2x^{100}+4x^{75}-2=0$$

Determinar el valor de :

$$S_{25}+S_{50}+S_{125}$$

Si : S_m es la suma de todas las multiplicaciones de las raíces tomadas de "m" en "m".

a) 1/3 b) 0 c) 8/3
d) 4/3 e) 7/3

59. Si el polinomio :
$P(x)=x^3+ax^2+x+2$ es divisible por (x+ 2). Entonces, el producto de las raíces racionales de la ecuación : $P(2x^3+2-P(x))=0$ es :

a) 0 b) 5 c) – 2
d) – 3 e) 2

60. Sea "P" una función polinomial definida por : $P(x)=-2x^7-ax^5+bx^3+1$, donde "a" entero positivo y "b" entero negativo. Entonces, indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I. Una raíz de ecuación : P(x) = 0 es 1/3.
II. La ecuación P(x) = 0 tiene una sola raíz real.
III. Si : $x_1<x_2$, entonces : $P(x_1)<P(x_2)$

a) VFV b) VVV c) VVF
d) FVF e) FFV

Claves

01.	a		31.	c
02.	c		32.	a
03.	c		33.	d
04.	a		34.	c
05.	d		35.	c
06.	c		36.	d
07.	d		37.	e
08.	a		38.	d
09.	b		39.	a
10.	d		40.	d
11.	b		41.	c
12.	d		42.	e
13.	c		43.	b
14.	c		44.	a
15.	b		45.	e
16.	d		46.	b
17.	b		47.	e
18.	d		48.	e
19.	b		49.	c
20.	c		50.	a
21.	a		51.	d
22.	c		52.	b
23.	c		53.	c
24.	b		54.	b
25.	c		55.	c
26.	e		56.	c
27.	d		57.	d
28.	e		58.	c
29.	e		59.	c
30.	b		60.	d

Capítulo 12

MATRICES - DETERMINANTES

MATRICES

Definición :

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos dispuestos en filas y columnas.

Para representar a una matriz, se utiliza letras mayúsculas.

Ejemplos :

* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{Fila}}$ $\updownarrow$ columna

* $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Orden de una Matriz

Viene dada por la representación $m \times n$, donde "m" es el número de filas y "n" el número de columnas de la matriz. Para los ejemplos citados anteriormente, tenemos :

* A es una matriz de orden 2×3
* B es una matriz de orden 3×3

Forma General de una Matriz de "m" filas y "n" Columnas :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & & & & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Donde : a_{ij} es el elemento genérico, ubicado en la fila "i", columna "j".

En forma abreviada se tendrá :

$$\boxed{A = [a_{ij}]_{m \times n}} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, ..., m = \overline{1; m} \\ j = 1, 2, 3, ..., n = \overline{1; n} \end{matrix}$$

Matrices Especiales

1. M. Fila :

Es aquella matriz que tiene una sola fila.

* $[1 \quad 5 \quad 7 \quad 10]$

2. M.Columna :

Es aquella matriz que tiene una sola columna.

* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

3. M. Rectangular :

Es aquella matriz, donde el número de filas y el número de columnas son diferentes.

* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

4. M. Cuadrada :

Es aquella matriz, donde el número de filas y el número de columnas son iguales.

* $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

5. M. Nula :

Es aquella matriz, donde todos sus elementos son iguales a cero.

* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Igualdad de Matrices :

Dadas las Matrices :

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \wedge B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

si estas son iguales, es decir : A = B, se verifican simultáneamente las condiciones :

I. A y B son de igual orden : $m \times n$.
II. Los elementos correspondientes son iguales : $a_{ij} = b_{ij}$; $\forall$ i ; j

Operaciones con Matrices

I. Adición : Dadas las matrices de igual orden

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \wedge B = [b_{ij}]_{m\times n}$$

se define :

$$\boxed{A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}}$$

* Hallar la matriz A + B, a partir de :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} (2+1) & (1+2) & (3+5) \\ (0-1) & (-1+4) & (2+3) \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

II. Multiplicación :

II.1 Multiplicación de un escalar por una matriz.

Sean : $A = [a_{ij}]_{m\times n} \wedge k \,\varepsilon\, R$, se define:

$$\boxed{K.A = K.[a_{ij}]_{m\times n} = [K.a_{ij}]_{m\times n}}$$

* Multipliquemos por 2 a la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2.A = 2.\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

II.2 Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna.

Sean : $A = [a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots.\ a_{1n}]$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

se define :

$$\boxed{A.B = [A_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13} - b_{31} + .. + a_{1n}.b_{n1}]}$$

* Multipliquemos A por B, donde :

$$A = [2\ \ 1\ \ 3] \wedge B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A.B = [2\ \ 1\ \ 3].\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

A . B = [(2).(2)+ (1).(4)+ (3).(6)]

A . B = [4+ 4+ 18] $\therefore$ A . B = [26]

III.3 Multiplicación de las Matrices

Dadas las matrices A y B, existe el producto matricial de A por B denotado por A.B, si se verifica lo siguiente :

$$\boxed{\#\ \text{de columnas de A} = \#\ \text{de filas de B}}$$

luego :

$$A_{m\times p}.B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

* Veamos un ejemplo :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

¿Existe A . B?, veamos :

A tiene orden $2\times 2 \rightarrow \#$ col = 2
B tiene orden $2\times 3 \rightarrow \#$ fil = 2

como : # col de A = # fil de B se afirma que si existe A . B, cuyo orden es de 2×3.

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora se multiplica de forma similar que el caso (II.2).

$$A.B = \begin{bmatrix} (2).(2)+(-1).(1) & (2).(-2)+(-1).(2) & (2)(5)+(-1)(-3) \\ (3).(2)+(1)(1) & (3)(-2)+(1).(2) & (3)(5)+(1)(3) \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 4-1 & -4-2 & 10+3 \\ 6+1 & -6+2 & 15-3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A.B = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 13 \\ 7 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

¿Existe B.A?, veamos :

col de B = 3 y # fil de A = 2 como # col de B $\neq$ # fil de A, se podrá afirmar que B.A no existe.

En General : El producto matricial no es conmutativo.

Teoremas :
Sean A, B y C matrices para las cuales se define la adición y/o multiplicación, además al escalar "k".

1. K . (A+ B) = K . A + K . B
2. A + B = B + A
3. A . B . C = (A.B).C = A.(B.C)
4. A.(B+ C) = A.B + A.C
5. A.B = 0 no implica A = 0 $\vee$ B = 0
6. A.B = A.C no implica B = C

Propiedades :
Sean las matrices A y B, de modo que existen A.B y B.A.

1. Si : A.B = B.A, se dice que A y B son matrices conmutables.
2. Si : A.B = -B.A se dice a A y B son matrices anticonmutables.

III. Potenciación :
Siendo A una matriz cuadrada y "n" un entero positivo, se define :

$$A^n = \begin{cases} A & ; n = 1 \\ \underbrace{A.A.A. \ldots\ldots .A}_{\text{"n" veces}} & ; n \geq 2 \end{cases}$$

* Hallar A^2, si : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} (2).(2)+(-1).(3) & (2).(-1)+(-1).(1) \\ (3).(2)+(1).(3) & (3).(-1)+(1).(1) \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4-3 & -2-1 \\ 6+3 & -3+1 \end{bmatrix} \therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$$

Transpuesta de una Matriz
Dada una matriz A, existe su matriz transpuesta denotada por A^T y definida como aquella matriz que se obtiene al transformar todas las filas de A en columnas.

$$\boxed{A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A^T = [a_{ji}]_{n \times m}}$$

* Veamos un ejemplo :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Propiedades :

Siendo A y B matrices, y el escalar "K".

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(K.A)^T = K.A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $(A.B)^T = B^T.A^T$

Estudio de las Matrices Cuadradas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

DS DP

Observaciones :

1. Toda matriz cuadrada de "n" filas y "n" columnas es de orden "n".
2. La diagonal trazada de izquierda a derecha recibe el nombre de ***Diagonal Principal*** (D.P.).
3. La diagonal trazada de derecha a izquierda recibe el nombre de ***Diagonal Secundaria*** (D.S.).

Traza de A (Traz(A))
Se denomina así, a la suma de todos los elementos de la diagonal principal.

$$\boxed{\text{Traz}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}}$$

* Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

D.P.

Traz(A) = (2)+ (8) + (-4)
$\therefore$ Traz(A) = 6

Propiedades :

Siendo A y B matrices y el escalar "K".

1. Traz (A+ B) = Traz(A) + Traz(B)
2. Traz (K . A) = K . Traz (A)
3. Traz (A . B) = Traz (B . A)

Matrices Cuadradas Especiales

1. M. Diagonal : Es aquella matriz no nula, donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son ceros.
Ejemplos :

* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

* $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. M. Escalar : Es aquella matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales.
Ejemplo :

* $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

3. M. Identidad (I) : Es aquella matriz escalar donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad.
Ejemplo :

* $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. M. triangular Superior : Es aquella matriz donde solamente todos los elementos ubicados debajo de la diagonal principal son ceros.
Ejemplo :

* $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

5. M. Triangular Inferior : Es aquella matriz donde solamente todos los elementos ubicados encima de la diagonal principal son ceros.
Ejemplo :

* $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$

Características Notables de algunas Matrices Cuadradas :

1. Matriz Simétrica : Si A es una matriz simétrica, verifica :

$$\boxed{A^T = A}$$

2. Matriz Antisimétrica : Si A es una matriz antisimétrica, verifica :

$$\boxed{A^T = -A}$$

3. Matriz Idempotente : Si A es una matriz idempotente, verifica :

$$\boxed{A^2 = A}$$

4. Matriz Involutiva : Si A es una matriz involutiva, verifica :

$$\boxed{A^2 = I\,;\ \text{(matriz identidad)}}$$

5. Matriz Nilpotente : Si A es una matriz nilpotente, verifica :

$$\boxed{A^p = 0\,;\ \text{(matriz nula)}}$$

p : índice de nilpotencia.

DETERMINANTES

Definición :

Un determinante es la relación funcional que aplicada a una matriz cuadrada la transforma en un escalar (número real).

Si A es una matriz cuadrada, su determinante se denota así : det(A) o | A| .

Determinante de Orden Uno

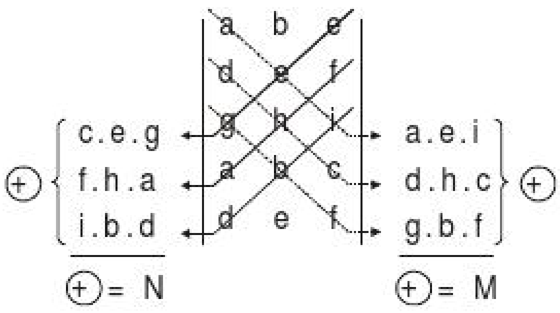
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\boxed{|A| = a.d - b.c}$$

Determinante de Orden Tres :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Según, la Regla de Sarrus :



$$\boxed{|A| = M - N}$$

Menor Complementario de una Componente

El menor complementario de la componente (elemento) a_{ij} denotado por M_{ij} es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila "i" y la columna "j" de la matriz dada.

Para :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

el menor complementario de $a_{12} = 4$ es :

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (5).(3) - (1).(2)$$

$$M_{12} = 15 - 2$$

$$\therefore\ M_{12} = 13$$

Cofactor de una Componente

El cofactor de la componente (elemento) a_{ij} denotado por A_{ij}, se define de la manera siguiente :

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}}$$

Para :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

el cofactor de la componente a_{13} es :

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \quad M_{13} = (-1)^4.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (1).[(1).(3) - (2).(-1)]$$

$$C_{13} = 3 + 2$$

$$\therefore\ C_{13} = 5$$

Teorema : El determinante de una matriz será igual a la suma de los productos obtenidos al multiplicar todos los elementos de una fila (o columna) por sus respectivos cofactores.

Para :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

con los elementos de la primera fila :

$$|A| = 2.\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-3).\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (2)(9) - (1)(7) + (-3)(-13)$$

$$|A| = 18 - 7 + 39$$

$$\therefore\ |A| = 50$$

Observación :

Para aplicar el teorema anterior, se recomienda escoger la fila (o columnas) que presente más ceros.

Propiedades :

Dadas las matrices cuadradas A y B, y el escalar "K".

1. $|A.B| = |A|.|B|$
2. $|A^T| = |A|$
3. $|K.A| = K^n.|A|$; "n" orden de A.
4. Si dos filas (o columnas) son proporcionales, el determinante será igual a cero.
5. Si todos los elementos de una fila (o columna) son ceros, el determinante será igual a cero.
6. Si se permutan dos filas (o columnas) consecutivas, el determinante cambia de signo.
7. El determinante no varía si a todos los elementos de una fila (o columna) se les aumenta un múltiplo de otra.
8. El determinante de una matriz triangular superior, triangular inferior y diagonal se obtiene multiplicando todos los elementos de la diagonal principal.

Determinante de Vandermonde

1. De orden dos :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a$$

2. De orden tres :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)$$

3. ***De orden cuatro*** :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

Definición :

Una matriz cuadrada A es no singular, si : $|A| \neq 0$, asimismo, si : $|A| = 0$, la matriz A será singular.

MATRIZ INVERSA

Dada una matriz cuadrada no singular A, si existe una única matriz B cuadrada del mismo orden, tal que : A . B = B . A = I (matriz identidad), entonces, definimos B como matriz inversa de A y lo denotamos por A^{-1}.

Teorema : Una matriz cuadrada tiene inversa, si y sólo si, es una matriz no singular; en tal caso se dice que la matriz es inversible.

Propiedades :

Sean A y B matrices cuadradas no singulares y el escalar "K".

1. $A . A^{-1} = A^{-1} . A = I$
2. $(A . B)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(K . A)^{-1} = K^{-1} . A^{-1}$
5. $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$

Cálculo de Matrices Inversas

1. ***De orden uno***

$$A = [a] \rightarrow A^{-1} = [\tfrac{1}{a}] \ ; \ a \neq 0$$

2. ***De orden dos***

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} . \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Observación :

Para matrices de orden mayores o iguales a tres se recomienda utilizar el método de Gauss-Jordan, el cual consiste en construir una matriz ampliada $(A \vdots I)$ donde por operaciones elementales debemos encontrar otra matriz ampliada $(I \vdots B)$, con lo cual se podrá afirmar que B es la inversa de A, es decir : $B = A^{-1}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Escribir explícitamente la matriz "A".

$$A=[A_{ij}]_{2\times 3} \,/\, \begin{matrix} a_{ij}=ij\,;i=j \\ a_{ij}=i+j\,;i\neq j \end{matrix}$$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

02. Dada la matriz :

$$A=\begin{bmatrix} 4x+9y & 5x \\ 18 & x-2y \end{bmatrix}$$

donde se cumple :

$a_{12}=2+a_{21}$

$a_{22}=0$

Calcular : x + y.

a) 5 b) 9 c) 8
d) 7 e) 6

03. Si :

$$\begin{bmatrix} m+n & 2p+q \\ m-n & p-q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Hallar : (m - p) + (2n - q).

a) 4 b) -3 c) 2
d) 3 e) -2

04. Dada la matriz :

$$B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular : $3B^T+I$.

a) $\begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 15 & 13 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 13 & 15 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$

05. Dados :

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si :

$$P(x;y) = 3x - 2y + 2$$

Hallar : P(A; B).

a) $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -7 & -7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

06. Dados :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hallar : $A\times B$.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

07. Dada la matriz :

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular : A^2-A .

a) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

08. Hallar la suma de los elementos de "x", tal que :

$$x\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

a) -2 b) 0 c) 1
d) 3 e) 5

09. Hallar la matriz inversa de :

$$A=\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Señalar la traza de dicha matriz inversa.

a) 5 b) 1 c) 2
d) 10 e) 9

10. Luego de resolver la siguiente ecuación :

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}=28$$

indicar su solución :

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

11. Se define la siguiente regla :

$$P(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

A partir de ella, calcular : P(-2, 0, 1).

a) 16 b) 19 c) 20
d) 21 e) 22

12. Luego de resolver la siguiente ecuación :

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} & x \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Indicar la suma de cuadrados de las soluciones.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

13. Si : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$

Hallar el valor de :

$$\begin{vmatrix} 2+a & b \\ 2+c & d \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & d \\ 1 & b \end{vmatrix}$$

a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

14. Dada la ecuación :

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 3 & y & -1 \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & y & 3 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = 0$$

se pide calcular el valor numérico de : $\dfrac{x}{z-1}$.

a) 2 b) 4 c) 3
d) 5 e) 11

15. Dadas las matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Hallar : $\dfrac{|A.B|}{\dfrac{|B|}{|A|}}$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

16. Hallar el valor de :

$$E = \sqrt{\begin{vmatrix} a & b & a \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & a \end{vmatrix}}$$

a) a + b b) a - b c) ab
d) ab - 1 e) a^2+b^2

17. "α" y "β" son las raíces de la ecuación :

$$x^2-4x+31=0$$

Calcular el determinante de :

$$\begin{bmatrix} \alpha+\beta & \alpha+\beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

a) 4 b) 9 c) 16
d) 25 e) 36

18. Luego de resolver la siguiente ecuación :

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 5 & x & -1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & x \end{vmatrix} = 0$$

Indicar el producto de soluciones.

a) 5 b) -5 c) 6
d) 3 e) -7

19. Si se sabe :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Además : a + b + c = 18.
Calcular :

$$\begin{vmatrix} a+c & b \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

a) 6 b) 13 c) -6
d) 12 e) 18

20. Si : $\alpha;\beta$ y θ son las raíces de la ecuación :

$$x^3+5x+3=0$$

Calcular el determinante de :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \theta \\ \beta & \theta & \alpha \\ \theta & \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

a) 0 b) 1 c) -1
d) 4 e) 7

21. Construir la matriz :

$$A = [a_{ij}]_{3\times 2} \,/\, a_{ij} = i + 3j$$

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

22. Sea la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} x-2y & x+3y & 2x \\ 3y-x & x+y & 2x-y \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

donde se cumple :

TRAZ(A) = 16 $\wedge$ $a_{21} + a_{31} = a_{22} + 1$.
Calcular : "x.y".

a) 6 b) 4 c) 5
d) 3 e) 7

23. Si en la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} 2x-3y & 4x \\ 2x+12 & y+6 \end{bmatrix}$$

Se cumple : $a_{21} = a_{12}$ y TRAZ(A) = 6.

Calcular : $\dfrac{x.y}{x+y}$.

a) 4 b) $\dfrac{4}{3}$ c) 3

d) 2 e) $\dfrac{1}{2}$

24. Sean las matrices :

$$A = \begin{bmatrix} x-2y & x \\ 3 & x-y \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 2 & y+4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Hallar : "x.y", si : A = B.

a) 6 b) 10 c) 8
d) 12 e) 14

25. Sean las matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hallar : 3A - 4B.

a) $\begin{bmatrix} 24 & -32 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & -16 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & -14 \\ -8 & -24 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & -22 \\ -13 & -5 \end{bmatrix}$

26. Dada la matriz : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Además : $P(x) = x^2 - 5x + 2I$.

Dar la suma de elementos de P(A) :

a) 8 b) -6 c) -4
d) 6 e) -8

27. Sean las matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hallar : A.B.

a) $\begin{bmatrix} 14 & -1 & 12 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 11 & 0 & 12 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 14 & -1 & 10 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 14 & -1 & 12 \\ 9 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

e) N.A.

28. Dada la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar la traza de A^2 .

a) 7 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

29. Hallar la matriz "x", que cumpla:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Indicar : TRAZ(X).

a) 2 b) 5 c) -17
d) 10 e) -2

30. Hallar la matriz inversa de :

$$A=\begin{bmatrix}6&4\\3&3\end{bmatrix}$$

a) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-1\\-2&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}2&-\frac{1}{2}\\3&4\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}2&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&1\\-2&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$

31. Se define la siguiente función :

$$F_{(x,y,z)}=\begin{vmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&0&z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&0&0\\4&y&0\\8&9&z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&5&7\\0&y&5\\0&0&z\end{vmatrix}$$

A partir de ella, calcular : Q(1, 2, 4).

a) 16 b) 18 c) 24
d) 15 e) 23

32. Sabiendo que :

$$\begin{vmatrix}a&-b\\2&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a&b\\6&-5\end{vmatrix}=32$$

Calcular el valor de : $\begin{vmatrix}4a&b\\-4&1\end{vmatrix}$

a) 8 b) 16 c) 32
d) 64 e)128

33. Resolver la ecuación :

$$\begin{vmatrix}x-1&x&x\\x&x+1&x\\x&x&x+3\end{vmatrix}=0$$

a) -6 b) -5 c) -4
d) 3 e) -3

34. A partir de la ecuación matricial :

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&7\end{bmatrix}.X=\begin{bmatrix}4&-1\\0&2\end{bmatrix}$$

Donde "X" es una matriz cuadrada de orden 2.
Hallar : Det(X).

a) 6 b) 7 c) 11
d) 8 e) 19

35. Sea la progresión geométrica :
$\div\div 2:n_2:n_3:n_4:..$ cuya razón es k^2 ; se cumple en ella que la suma de los cuatro primeros es igual a 80. $(k\,\varepsilon R^+)$. Además se tiene el siguiente resultado:

$$\begin{vmatrix}a&1\\b&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}ak&k\\bk&2k\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}ak^2&k^2\\bk^2&2k^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}ak^3&k^3\\bk^3&2k^3\end{vmatrix}=120$$

Hallar : 2a - b.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

36. Si : $\alpha;\beta$ y θ son las raíces de la ecuación :
$x^3+4x+3=0$. Calcular el determinante de :

$$\begin{bmatrix}\alpha&\beta&\theta\\\beta&\theta&\alpha\\\theta&\alpha&\beta\end{bmatrix}$$

a) 0 b) 1 c) -1
d) 4 e) 7

37. Calcular :

$$\begin{vmatrix}a+b&a-b\\a-b&a+b\end{vmatrix}$$

a) ab b) 1 c) 0
d) 4ab e) 2ab

38. Si : $k\,\varepsilon N$, obtener "3k + 5", sabiendo que :

$$\begin{vmatrix}-2&k-3&-k\\1&1&2\\k-1&1&k+2\end{vmatrix}=0$$

a) 17 b) 29 c) 6
d) 20 e) 4

39. Calcular el | A| , si :

$$\begin{bmatrix}8&3\\2&1\end{bmatrix}.A=\begin{bmatrix}4&2\\2&5\end{bmatrix}$$

a) 3 b) 9 c) 8
d) 25 e) 36

40. Hallar "x" en :

$$\begin{vmatrix}a&a&x\\m&m&m\\b&x&b\end{vmatrix}=0$$

e indicar uno de sus valores.

a) a b ab c) 1
d) 1/b e) m

41. Escribir explícitamente la matriz :

$$C = [c_{ij}] \varepsilon k^{2\times3} / c_{ij} = \text{Máx}(i, j)$$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

42. Sean :

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$, y

$$\begin{cases} x + 2y = A \\ x - y = B \end{cases}$$

donde "x" es :

a) $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{9}{2} \\ \frac{4}{3} & 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{4} & -1 \end{bmatrix}$

43. Si :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Hallar : (x + y + z).

a) 11 b) 13 c) 6
d) 7 e) -4

44. Dada la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar la traza de A^2.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

45. Hallar la traza de A^{-1}, si :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 0

d) $-\frac{1}{2}$ e) 4

46. Sean las matrices :

$A = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 21x & 48 \\ 16 & y-1 \end{bmatrix}$

donde se cumple que : $A^2 = B$.
Hallar : "xy".

a) 200 b) 140 c) 180
d) 130 e) 160

47. Sea la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} x-y & 6 & 9 \\ -1 & 2x-y & 3 \\ 4 & -5 & 2y-x \end{bmatrix}$$

donde se cumple :
$\text{Traz}(A) = a_{13} + a_{21}$. Calcular "x".

a) 6 b) 5 c) 3
d) 4 e) 2

48. Si : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ y $F(x) = x^2 - 3x + 2$.

Hallar la suma de elementos de la diagonal principal de F(A).

a) 2 b) 14 c) 16
d) 18 e) 11

49. Dada la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular la suma de elementos de " A^n ".

a) 3.2^n b) 5.2^n c) 2.3^n

d) 2^n e) 5.3^n

50. Sea :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}$; con : a, b y c, enteros positivos, se sabe que la segunda columna de :

$B = A^2 - A^T$ es : $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Calcular : a + b + c.

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

51. Sea la matriz :

$H = \begin{bmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{bmatrix}$, tal que x > 0 y Det(H) = 4.

Luego H^2 es :

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

52. Sea : $B = A^4$, donde : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Entonces, el determinante de "B" es :

a) 2 b) $2^2.10$ c) $2^4.10^2$
d) $2^{16}.10^8$ e) $2^8.10^4$

53. Resolver :

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x^2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

54. Calcular "x" en :

$$\begin{vmatrix} a & -b & 2c \\ -a & 2b & -c \\ 2a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & ab \\ c & a+b \end{vmatrix}$$

a) $\frac{abc}{(a+b)}$ b) $\frac{-abc}{(a-b)}$ c) $\frac{-5abc}{(a+b)}$

d) $\frac{5abc}{(a+b)}$ e) $\frac{3abc}{(a+b)}$

55. Dada una matriz cuadrada "A", se denomina "valores propios de la matriz A", a los números "x" que satisfacen la ecuación : | A-xI| = 0.
Hallar los valores propios de la matriz "A", si :
Además :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Además : I $\rightarrow$ matriz identidad.

a) 2; -2; 4 b) 3; 2; 1 c) 4; 5; 1
d) 1; 0; -1 e) 3; 2; -2

56. Si : "α" es raíz de la ecuación :

$$x^3 - 1 = 0$$

Hallar el valor de :

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

a) α b) 4 c) 3
d) α^2 e) 0

57. Hallar "x", a partir de :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & x \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

a) 1 b) 3 c) 5
d) 7 e) 9

58. Si : $F(x) = x^2 - 5x + 3$.
Encontrar el determinante de $F_{(B-I)}$, donde :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) 4 b) 2 c) 1
d) 5 e) 0

59. Resolver :

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a) $-2 \pm \sqrt{22}$ b) ± 4
c) $-4 \pm \sqrt{22}$ d) $-2 \pm \sqrt{11}$
e) $\pm \sqrt{11}$

60. Sea "A" una matriz definida por :

$$A = \begin{bmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{bmatrix}$$

Si : a+ b+ c = 3, entonces el valor del det(A) es :

a) 27 b) 9 c) 0
d) -9 e) -27

Claves

01.	b	31.	c
02.	e	32.	b
03.	c	33.	e
04.	c	34.	d
05.	d	35.	c
06.	c	36.	a
07.	d	37.	d
08.	e	38.	a
09.	a	39.	c
10.	a	40.	a
11.	a	41.	b
12.	e	42.	a
13.	e	43.	c
14.	c	44.	a
15.	d	45.	e
16.	b	46.	b
17.	c	47.	d
18.	c	48.	c
19.	c	49.	c
20.	a	50.	d
21.	c	51.	d
22.	c	52.	e
23.	c	53.	d
24.	d	54.	c
25.	e	55.	e
26.	e	56.	e
27.	a	57.	b
28.	a	58.	e
29.	d	59.	c
30.	e	60.	e

Capítulo

13 SISTEMA DE ECUACIONES

SISTEMAS LINEALES

Forma General :

Consideremos un sistema lineal de "m" ecuaciones con "n" incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3} + x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Donde :

x_1, x_2, x_3, ... $\wedge$ x_n son las incógnitas, siendo el conjunto solución de la forma :

$$CS = \{(x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots.. x_n)\}$$

Observación :

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, existen diversos métodos como por ejemplo :

* Método de Sustitución.
* Método de Reducción.
* Método de Igualación.
* Método Matricial.
* Método de Cramer (Determinantes).

Sistema Lineal Homogéneo :

Es aquel donde los términos independientes son nulos (ceros).
Ejemplo :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \text{ .... (1)} \\ 2x + y + z = 0 \text{ .... (2)} \\ x - 3y - 2z = 0 \text{ ..... (3)} \end{cases}$$

Un sistema lineal homogéneo siempre es compatible donde una de sus soluciones es la solución trivial (cada incógnita es igual a cero). Para el ejemplo :
Solución trivial = (0; 0; 0).

Asimismo, el sistema lineal homogéneo puede tener otras soluciones, las llamadas no triviales.

Resolución de un Sistema lineal según el Método de Cramer :

Dado un sistema lineal de "n" ecuaciones con "n" incógnitas :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_n + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Consideremos :

1. *Determinante del Sistema (Δ_s)*

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. *Determinante de una Incógnita (Δ_i)*

Se obtiene a partir del determinante anterior, reemplazando los elementos de la columna de coeficientes de la incógnita en referencia por los términos independientes.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

cada incógnita del sistema se obtendrá, según la relación.

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_s} ; \forall i = \overline{1;n}}$$

Ejemplo :

Resolver :

$$\begin{cases} 2x+5y=7 \text{ ...... (1)} \\ 3x-2y=3 \text{ ...... (2)} \end{cases}$$

observar que :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2)-(3)(5)$$

$$= -4 - 15 = -19$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (7)(-2)-(3)(5)$$

$$= -14 - 15 = -29$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3)-(3)(7)$$

$$= 6 - 21 = -15$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} \rightarrow x = \frac{29}{19}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} \rightarrow y = \frac{15}{19}$$

$$\therefore CS = \left\{\left(\frac{29}{19}; \frac{15}{19}\right)\right\}$$

Teorema : Dado el sistema lineal homogéneo.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

si este admite soluciones aparte de la trivial, el determinante del sistema deberá ser nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Análisis de las Soluciones de un Sistema Lineal Dado el sistema :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

donde la solución se obtiene a partir de :

$x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta_s}$, luego :

1. El sistema tiene solución única, si y sólo si: $\Delta_s \neq 0$.
2. El sistema tiene infinitas soluciones, si y sólo si: $\Delta_i = 0 \wedge \Delta_s = 0$.
3. El sistema no tiene solución si siendo $\Delta_s = 0$, existe algún $\Delta_i \neq 0$.

Propiedad

Un caso particular de lo visto anteriormente se presenta en el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas :

$$\begin{cases} ax+by \ \ = c \text{ .... (1)} \\ a_1x+b_1y = c_1 \text{.... (2)} \end{cases}$$

1. El sistema será compatible determinado, es decir, tendrá solución única, si se verifica:

$$\boxed{\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}}$$

2. El sistema será compatible indeterminado, es decir, tendrá infinitas soluciones, si se verifica :

$$\boxed{\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}}$$

3. El sistema será incompatible, es decir no tendrá solución si se verifica :

$$\boxed{\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}}$$

SISTEMAS NO LINEALES

Criterios de Resolución :

1. Si el sistema está conformado por ecuaciones de diferentes grados se deberá encontrar una nueva ecuación en función de una sola incógnita, para a partir de ésta determinar las soluciones del sistema.
Ejemplo :

Resolver :

$$\begin{cases} x+y=7 \quad ......(1) \\ \quad xy=10 \quad ..... (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1) : $x = 7 - y$

Reemplazando en (2) : $(7-y)y = 10$

Efectuando, tenemos : $y^2-7y+10=0$

$(y-5)(y-2) = 0$

De donde, obtenemos : $y = 5 \ \vee \ y = 2$

Si : $y = 5$ en (2) : $x = 2$

$\rightarrow$ Sol : (2; 5)

Si : $y = 2$ en (2) : $x = 5$

$\rightarrow$ Sol : (5; 2)

$\therefore$ CS = { (2; 5), (5; 2)}

2. Si el sistema está formado por ecuaciones, cuya parte literal es homogéneo y de igual grado se recomienda realizar la siguiente sustitución : $y = Kx$, donde el parámetro "K" se determinará por eliminación de las incógnitas $x \wedge y$.
Una vez encontrado el valor de "K", fácilmente se obtendrá el valor de cada incógnita del sistema.
Ejemplo :
Resolver :

$$\begin{cases} x^2+3xy+3y^2=21 \ .... (1) \\ x^2+xy+3y^2 \ =15 \ .... (2) \end{cases}$$

Hagamos : $x = Ky$

Reemplazando en (1) :

$$y^2(K^2+3K+3)=21$$

Reemplazando en (2) :

$$y^2(K^2+k+3)=15$$

Dividiendo m.a-m : $\dfrac{K^2+3K+3}{K^2+K+3}=\dfrac{7}{5}$

De donde, obtenemos : $K^2-4K+3=0$

$K = 3 \ \vee \ K = 1$

Como : $x = Ky \rightarrow x = 3y \ \vee \ x = y$

en (1) con $x = 3y$: $9y^2+9y^2+3y^2=21$

$21y^2=21$

$y^2=1$

$y = 1 \ \vee \ y = -1$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x = 3 \ \vee \ x = -3$

Soluciones (3; 1) y (-3; -1)

en (1) con $x = y$: $y^2+3y^2+3y^2=21$

$7y^2=21$

$y^2=3$

$y = \sqrt{3} \ \vee \ y = -\sqrt{3}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x = \sqrt{3} \ \vee \ x = -\sqrt{3}$

Soluciones : $(\sqrt{3};\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

$\therefore CS=\{(3;1),(-3;-1),(\sqrt{3};\sqrt{3}),(-\sqrt{3};-\sqrt{3})\}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Dar el valor de "a", si para : (x; y) = (5; y_0) el sistema verifica :

$$\begin{cases}(2a+1)x+(a+3)y=1\ldots(1)\\(2a-1)x+(a+2)y=-1\ldots(2)\end{cases}$$

a) 8 b) 9 c) 10
d) 7 e) 6

02. Si el sistema :

$$\begin{cases}(a+3)x+(a-3)y=2a\\(b-2)x+(b+2)y=2b\end{cases}$$

tiene solución única, hallar : $\frac{a}{b}$.

a) $R-\left\{\frac{3}{2}\right\}$ b) $R-\left\{\frac{2}{3}\right\}$ c) $R-\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

d) $R-\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ e) $R-\{0\}$

03. Hallar : $\frac{x+y}{x-y}$, del sistema :

$$\begin{cases}\dfrac{3x+2y}{x+y-15}=-9\ \ldots(1)\\11(x-y)=135-x\ \ldots(2)\end{cases}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

04. Si :

$x-\sqrt{y}=14;x>10$

$x+y=20$

Entonces : $\frac{x}{y}$, es :

a) 1 b) -1 c) 0
d) 8 e) 4

05. Calcular : x^3+y^3, si :

$$\frac{5xy}{x+y}=\frac{3xy}{x-y}=4$$

a) 63 b) 28 c) 26
d) 65 e) 0

06. ¿Cuántas soluciones tiene?

$x^2+y^2=13$

$x^2+|y|=11$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

07. El sistema :

$$\begin{cases}x-y+z=35\\x^2+y-3z=a+1\end{cases}$$

Además : x, y, z; son proporcionales a los números 4, 2, 5; respectivamente. Hallar el valor de "a".

a) 333 b) 334 c) 335
d) 331 e) 925

08. Si el sistema :
$3x+5y=1$
$2ax-by=8$
tiene infinitas soluciones. Hallar el valor de "a-b".

a) 52 b) -12 c) 34
d) -28 e) 16

09. Indicar un valor de "xy", al resolver :

$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4$

$x^2-y^2=9$

a) 12 b) -18 c) 18
d) 20 e) 24

10. Respecto al conjunto :

A= { (x, y)/2x+ 3y - 6= 0; 4x - 3y - 6 = 0; x - 1 = 1; 3y = 2}

a) Tiene 6 elementos.
b) Tiene 4 elementos.
c) Tiene 1 elemento.
d) Es el conjunto vacío.
e) Tiene un número ilimitado de elementos.

11. Hallar el producto de los valores de "x+ y", que resuelve el sistema :

$x^2+y^2=113-xy$

$x+y=43-xy$

a) 112 b) -156 c) 121
d) 171 e) -171

12. Al resolver el sistema :

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{y+1}=\frac{5}{4}$$

$$\frac{4}{x}+\frac{7}{y+1}=\frac{15}{4}$$

se obtiene :

a) x = 1, y = 2
b) x = 2, y = 1
c) x = 1, y = 3
d) x = 3, y = 3
e) x = 2, y = 3

13. ¿Para qué valores de "m" el sistema de ecuaciones :
$2x + 7y = m$
$3x + 5y = 13$
tiene soluciones positivas ?

a) $\frac{26}{3} \le m < \frac{91}{5}$ b) $\frac{26}{3} < m \le \frac{91}{5}$

c) $\frac{26}{3} \le m \le \frac{91}{5}$ d) $\frac{26}{3} < m < \frac{91}{5}$

e) $9 < m < 11$

14. Sea la terna (a; b; c) solución del sistema de ecuaciones:
$7x + 4y - 4z = 7$
$7y + 5z = 12$
$11y + 8z = 10$
Entonces, la suma (b + c), es igual a :

a) -100 b) -112 c) 1
d) 80 e) 96

15. Determinar la única solución del sistema:

$x^2 + y^2 = 144$ .... (1)
$y + 13 = nx$ .... (2)

Si : $n > 0$; proporcionando el valor de :

$(\frac{y}{x})$.

a) -7/6 b) -12/5 c) 7/12
d) 5/7 e) 3/5

16. Dado el sistema :

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

si : $2y > x$, entonces el valor de $\frac{x}{y}$ es :

a) 1 b) 3/2 c) 2
d) 8/3 e) 3

17. Resolver :

$$3x - 2y = 5$$
$$x^2 - xy + 2y = 7$$

a) (x = 1, y = 8) y (x = 3, y = 9/2)
b) (x = 2, y = 3) y (x = 8, y = 9/2)
c) (x = 2, y = 9/2) y (x = 3, y = 1)
d) (x = 3, y = 5) y (x = 2, y = 8/3)
e) (x = 3, y = 2) y (x = 8, y = 19/2)

18. Hallar "n", para que el sistema sea incompatible :

$(n + 3)x + 2ny = 5n - 9$
$(n + 4)x + (3n - 2)y = 2n + 1$

a) -1 b) -2 c) 0
d) 1 e) 2

19. Hallar "a+ b", de modo que el sistema :
$$\begin{cases} (a-1)x + 4y = 10 \\ 2x + (b+1)y = 5 \end{cases}$$
posea infinitas soluciones.

a) 4 b) 6 c) 8
d) 10 e) 12

20. Si : x, y, z son enteros y no negativos, entonces con respecto a las soluciones del sistema :
$$x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz$$
$$x^2 = 2(y + z)$$
se concluye que :

a) Existen cuatro soluciones.
b) Existen tres soluciones.
c) Existen sólo dos soluciones.
d) No existen soluciones enteras.
e) Existe más de cuatro soluciones.

21. Resolver el sistema :
$$\sqrt{x^2 + 12y} + \sqrt{y^2 + 12x} = 33$$
$$x + y = 23$$
Calcular : $\sqrt{2x - y}$

a) 3 b) 2 c) 5
d) 7 e) 4

22. El conjunto de soluciones del siguiente sistema :
$x^2 + y^2 = r^2$
$y = r$; para : $r > 0$ es :

a) ϕ
b) Conjunto unitario.
c) Un conjunto de dos elementos.
d) Un conjunto de tres elementos.
e) Un conjunto de cuatro elementos.

23. El mínimo valor de "z" que satisface el sistema de ecuaciones :
$x + y = 12$
$x^2 + y^2 = z$
es :

a) 9 b) 18 c) 36
d) 72 e 144

24. Si :
$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ -a + b + c = 0 \\ 3a - 5b - c = 0 \end{cases}$$

Entonces : $2a + \frac{5}{b} - 2c$ es igual a :

a) 13 b) 12 c) 11
d) 10 e) 9

25. Sea "m" un entero, tal que el sistema de ecuaciones :
$2x + 3y = 8$
$mx - y = 37$
$3x + 8y = m$
sea compatible. Si : (x_0, y_0) es la solución de dicho sistema. Hallar el valor de :

$$E = m - (x_0 + y_0)$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

26. Hallar el valor de "a" para que el sistema tenga solución única :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = a \end{cases}$$

a) a = 1 b) a = 2/3
c) a = 4/3 d) a = -2/3
e) a = -1/2

27. Resolver en R^2 el sistema de ecuaciones:

$$\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2} \quad ..... (1)$$

$$x + xy + y = 9 \quad .... (2)$$

Indicando el menor valor que toma "x".

a) 2 b) 3 c) 4
d) -2 e) -3

28. ¿Para qué valor del parámetro λ, el sistema en x é y :

$$\begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ \lambda x + y = \lambda^2 \end{cases}$$

es compatible indeterminado?

a) Únicamente $\lambda = -1$
b) Sólo $\lambda = 0$
c) $\lambda = -1$; $\lambda = 0$
d) Únicamente $\lambda = 1$, $\lambda = -1$
e) Sólo cuando $\lambda = 1$

29. El sistema de segundo grado :

$$x^2 + y^2 = 16 \quad .... (1)$$

$$y + 5 = mx \quad .... (2)$$

para un cierto valor de "m" admite solución única. Obtener dicho valor de "m".

a) 3/4 b) 1/4 c) 7/4
d) 1/2 e) 1/5

30. ¿Cuántas soluciones no nulas tiene el sistema :

$3xy + 2z = xz + 6y = 2yz + 3x = 0$?

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

31. Resolver :

$$(x + y)(x - y) = 11 \quad .... (\alpha)$$

$$(y + 3)(y - 3) = x \quad .... (\beta)$$

Indicando uno de los valores obtenidos para "x" ó "y".

a) $-\sqrt{6}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$
d) $-\sqrt{5}$ e) $-\sqrt{10}$

32. Resolver en ***R*** el sistema :
$x + y - z = 1$
$x^2 - y^2 + z^2 = 1$
$-x^3 + y^3 + z^3 = -1$

Indicando el número de elementos del conjunto solución real del sistema.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

33. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$xy = ab(a^2 + b^2)$$

Entonces, el valor de $\sqrt{2}$ (x-y) es igual a :

a) $(a-b)^2$ b) $(a+b)^2$
c) $2(a-b)^2$ d) $2(a+b)^2$
e) a - b

34. Si las ecuaciones :

$ax + by = 1$; $cx^2 + dy^2 = 1$

tienen solamente una solución, calcular :

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{d}$$

a) 1 b) 3/2 c) 2/3
d) 5/4 e) 4/5

35. Indicar "z" al resolver :

$$\begin{cases} x + 2y - w = 5 \\ 2x - 3z = 7 \\ x + y + z = 2 \\ -2x + y + w = 2 \end{cases}$$

a) -1 b) 2 c) -3
d) 0 e) 8

36. El valor positivo de "x+ y+ z", del sistema :
$2x + y + z = xy + yz$
$2y + x + z = xz + xy$
$2z + x + y = xz + yz$
$x^2 + y^2 + z^2 = 2$

a) $2 + \sqrt{6}$ b) $2 + \sqrt{5}$ c) $2 + \sqrt{7}$
d) $2 + \sqrt{3}$ e) $2 + \sqrt{2}$

37. Determinar la suma de valores que adopta "k", de tal manera que el sistema lineal homogéneo :
$(1 - k)x + y - z = 0$
$2x - ky - 2z = 0$
$x - y - (1 + k)z = 0$
admita también soluciones no triviales.

a) 12 b) -2 c) 4
d) -9 e) 0

38. Hallar : (a+ b), para los cuales las ecuaciones :
$x^3 + ax^2 + 18 = 0$
$x^3 + bx + 12 = 0$
tienen 2 raíces comunes.

a) 4 b) 6 c) 3
d) 5 e) 16

39. Luego de resolver el sistema :
$x + y + z = 5$ .... (1)
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12}$ ...... (2)
$xy + yz + xz = -2$ ..... (3)

Señale el menor valor que toma "x".

a) 2 b) 3 c) 4
d) -2 e) -3

40. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema :
$$\frac{x}{y^2 - 3} = \frac{y}{x^2 - 3} = \frac{-7}{x^3 + y^3} \ ?$$

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

41. Establecer la condición para : a, b, $\neq$ 0, para que :
$x + y = a > 0$ .... (1)
$x^3 + y^3 = b(x + y)$ .... (2)

admita soluciones de componentes reales.

a) $4b - a^2 \geq 0$ b) $4a + b < 0$
c) $a - 4b^2 > 0$ d) $b - 4a^2 \geq 0$
e) $a + 4b \leq 0$

42. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema :
$y^2 + z^2 - x = z^2 + x^2 - y = x^2 + y^2 - z = 1$?

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

43. Del sistema :
$x^2 - y^2 = xy - ab$
$(x + y)(ax + by) = 2ab(a + b)$
un valor que toma "x" es :

a) $\sqrt{a}$ b) $\sqrt{b}$ c) $\sqrt{ab}$
d) $\sqrt{a + b}$ e) $\sqrt{a - b}$

44. Dado el sistema :
$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = (10 - x - y)^2 \\ xy + x + y = 11 \end{cases}$$
Entonces, el valor de : x + y, es :

a) 5 b) 6 c) 16
d) 14 e) 10

45. Resolver :
$$\sqrt{\frac{3x - 2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x - 2y}} = 2 \ \ldots\ldots (\alpha)$$
$$4y^2 - 1 = 3y(x - 1) \ \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Indicando el menor valor para "y".

a) 1 b) 1/2 c) 1/4
d) 1/8 e) 1/16

46. Resolver el sistema, y hallar : y - x.
$$\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 70 \\ x\sqrt{xy} + y^2 = 105 \end{cases}$$

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

47. En el sistema, hallar : x^{y+z}, donde : $x \varepsilon R^+$.
$$\begin{cases} x^2 + 2xy - xz = 2 \\ xy + 2xy^2 - yz = 4 \\ zx + 2yz - z^2 = 6 \end{cases}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

48. Resolver :

$2\sqrt{x-y}+\sqrt[4]{x+2y}=4$ ...... (α)

$\sqrt[8]{(x-y)^4(x+2y)^2}=2$ ...... (β)

Indicando (xy), si : x, y ε R.

a) 6 b) 9 c) 30
d) 40 e) 16

49. Resolver el sistema :

$x+xy+xy^2+xy^3=15$ .... (α)

$x^2+x^2y^2+x^2y^4+x^2y^6=85$..... ($\beta$)

Indicando la suma del mayor valor de "x" con el menor valor de "y".

a) 8 b) 16/3 c) 17/2
d) 3/2 e) 7/2

50. Resolviendo el sistema :

$$x+y^2=y+x^2=a+a^2$$

Se obtienen para "x" é "y", 2 valores de la forma :

$$\frac{1}{2}[1\pm\sqrt{(na-1)(na+3)}]$$

Hallar "n".

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

51. Resolver y dar el valor de : "x+ y".

$(x+1)^2+(y+1)^2=(10-x-y)$

$xy - x - y = 11$

a) 3 b) 5 c) 7
d) 9 e) 11

52. Dado el sistema :

$(a-2b)x+y=4^a-3.b$

$2x+(2a+b)y=b^{a-b}+6a+4$

Donde : $a - 2b = 3 \wedge 2a + b = 1$.

Determinar : $a + b + 2x_o + y_o$, donde :

(x_o, y_o) es solución del sistema.

a) 11 c) 0 c) 19
d) 3 e) 4

53. Resolver el sistema :

$x + y + z = 9$; $z=\dfrac{2(1+xy)^2}{x+y}$

$x^2+y^2+z^2=41$

Indicar como respuesta : $x^y+y^z+z^x$.

a) 29 b) 39 c) 30
d) 49 e) 40

54. Resolver en los reales :

$x+y=\dfrac{3}{2}xy$ .... (α)

$x^3+y^3=9$ .... (β)

indicando la suma de todos los valores de "x" con todos los valores de "y" obtenidos.

a) 1 b) 5 c) 6
d) 8 e) 10

55. ¿Para qué valor real de "K", el sistema :

$x + y + z = 2$

$x^2+y^2+z^2=2$

$x^3+y^3+z^3=K$

tiene solución real?

a) 2 b) $\sqrt{3}$ c) $\dfrac{7}{4}$

d) $\sqrt{5}$ e) Más de una es correcta

56. Al resolver el sistema :

$3x^2+xy-2y^2=0$ ...(1)

$2x^2-3xy+y^2=1$ ...(2)

se obtiene una solución de la forma :

$x = ai \wedge y = bi$ $(i = \sqrt{-1})$

Hallar : $(a-b)^a$, si : $a,b,\varepsilon Z^+$.

a) 4 b) 3 c) 2
d) 1 e) 5

57. Resolver el sistema y dar "xy".

$\dfrac{8}{2x-3y+17}+5x-8y+44=5$...(1)

$\dfrac{5}{2x-3y+17}+16y=10x+88\dfrac{1}{2}$...(2)

a) 11 b) -3 c) -90
d) 86 e) 99

58. Encontrar el intervalo de "m" para que el sistema :

$2x - 5y = 1$; $mx + 10y = 4$

se satisfaga $\forall\, x\, \varepsilon R^+$; $\forall\, y\, \varepsilon R^+$.

a) m > -4 b) m < -4 c) -4 < m < 8
d) m > 8 e) m < 8

59. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:
$x + y + z = 0$
$(b+c)x + (a+c)y + (a+b)z = 0$
$bcx + acy + abz = 1$
Entonces, la solución del sistema para : x, y, z, en ese orden con $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$, es :

a) $\frac{1}{(a-b)(a-c)};-\frac{1}{(a-b)(c-b)};-\frac{1}{(a-c)(b-c)}$

b) $-\frac{1}{(a-b)(a-c)};\frac{1}{(a-b)(c-b)};-\frac{1}{(a-c)(b-c)}$

c) $-\frac{a}{(a-b)(a-c)};-\frac{b}{(a-b)(c-b)};-\frac{c}{(a-c)(b-c)}$

d) $\frac{a}{(a-b)(a-c)};\frac{b}{(a-b)(c-b)};\frac{c}{(a-c)(b-c)}$

e) $\frac{-a}{(b-c)};\frac{-b}{(c-a)};\frac{-c}{(a-b)}$

60. Resolver el sistema adjunto y proporcionar el valor real de "x"; $a, b, c \in R$.

$$x^3+a=y^3+b=z^3+c=xyz$$

siendo :

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=2abc(a+b+c)$$

a) $\sqrt[3]{\frac{-2a^2-ab-ac-bc}{a+b+c}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2a^2-ab-ac+bc}{2(a+b+c)}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-2a^2-ab-ac+bc}{2(a+b+c)}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ad}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{a^2-b^2-c^2}{ab+bc+ac}}$

Claves

01.	c
02.	d
03.	a
04.	e
05.	d
06.	e
07.	b
08.	a
09.	d
10.	c
11.	b
12.	e
13.	d
14.	b
15.	b
16.	b
17.	e
18.	b
19.	b
20.	a
21.	e
22.	b
23.	d
24.	c
25.	a
26.	e
27.	c
28.	e
29.	a
30.	c

31.	d
32.	b
33.	a
34.	a
35.	c
36.	a
37.	e
38.	c
39.	d
40.	e
41.	a
42.	d
43.	c
44.	a
45.	b
46.	b
47.	a
48.	c
49.	c
50.	b
51.	b
52.	a
53.	b
54.	c
55.	e
56.	d
57.	e
58.	c
59.	c
60.	c

Capítulo 14

DESIGUALDADES E INECUACIONES VALOR ABSOLUTO

DESIGUALDADES

Definición

Se denomina desigualdad a la comparación que se establece entre dos expresiones reales, mediante los signos de relación $>$, $<$; $\geq$ o $\leq$.

Ejemplo :

Siendo, a y b números reales :

$a > b$ a mayor que b
$a < b$ a menor que b
$a \geq b$ a mayor o igual que b
$a \leq b$ a menor o igual que b

Observación : A los signos de relación $>$ o $<$ se les da el nombre de signos simples mientras que a $\geq$ o $\leq$ se les denomina signos dobles.

Axiomas de la desigualdad

1. Ley de Tricotomía
$\forall a \wedge b \,\varepsilon\, R : a > b \vee a < b \vee a = b$

2. Ley de Transitividad
$\forall a, b \wedge c \,\varepsilon\, R / a > b \wedge b > c \rightarrow a > c$

3. Ley Aditiva
$\forall a, b \wedge c \,\varepsilon\, R / a > b \rightarrow a + c > b + c$

4. Ley Multiplicativa

4.1. $\forall a, b \,\varepsilon\, R \wedge c \,\varepsilon\, R^+ / a > b \rightarrow ac > bc$

4.2. $\forall a, b \,\varepsilon\, R \wedge c \,\varepsilon\, R^- / a > b \rightarrow ac < bc$

Equivalencias Usuales :

Siendo a, b, c números reales.

1. $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$
2. $a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c$

Teoremas de la Desigualdad

1. $\forall a \,\varepsilon\, R : a^2 \geq 0$

2. $a > 0 \rightarrow \frac{1}{a} > 0$

   $a < 0 \rightarrow \frac{1}{a} < 0$

3. $a, b, c \wedge d \,\varepsilon\, R$:

$$\begin{array}{l} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$$

4. $a, b, c \wedge d \,\varepsilon\, R^+$:

$$\begin{array}{l} a > b \\ c > d \\ \hline a.c > b.d \end{array}$$

5. $a, b \wedge c \,\varepsilon\, R^+$; o $a, b \wedge c \,\varepsilon\, R^-$

   $a < b < c \rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

6. $\forall a, b \wedge c \,\varepsilon\, R, n \,\varepsilon\, Z^+ /$

   $a < b < c \rightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1} < c^{2n+1}$

7. $\forall a, b \wedge c \,\varepsilon\, R^+, n \,\varepsilon\, Z^+$

   $a < b < c \rightarrow a^{2n} < b^{2n} < c^{2n}$

Propiedades de la desigualdad

1. $a < 0, c > 0 \wedge c^2 > a^2$

   $a < b < c \rightarrow 0 \leq b^2 < c^2$

2. $a > 0 : a + \frac{1}{a} \geq 2$

3. $a < 0 : a + \frac{1}{a} \leq -2$

Propiedad adicional :

Para números reales positivos, tenemos :

MP = Media potencial
MA = Media aritmética
MG = Media geométrica
MH = Media Armónica

$$\boxed{MP \geq MA \geq MG \geq MH}$$

Para dos números : $a \wedge b$; $k \varepsilon Z^+$

$$\sqrt[k]{\frac{a^k+b^k}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

para tres números : a, b $\wedge$ c; $k \varepsilon Z^+$

$$\sqrt[k]{\frac{a^k+b^k+c^k}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

INTERVALOS

Definición

Se denomina intervalo al conjunto cuyos elementos son números reales, dichos elementos se encuentran contenidos entre dos números fijos denominados extremos, a veces los extremos forman parte del intervalo.

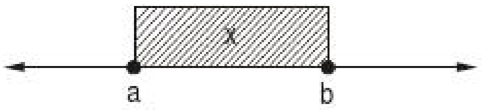
1. *Intervalos acotados :*
Son todos aquellos intervalos cuyos extremos son reales, estos pueden ser :

1.1.Intervalo abierto :
No considera a los extremos, se presenta por existencia de algún signo de relación simple.
En la recta, se tendrá :

Donde : $a < x < b \Leftrightarrow x \varepsilon < a ; b >$

También : $x \varepsilon] a ; b [$

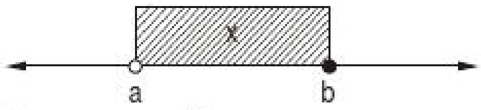
1.2.Intervalo cerrado :
Se considera a los extremos, se presenta por existencia de algún signo de relación doble.
En la recta real, se tendrá :



Donde : $a \leq x \leq b \Leftrightarrow x \varepsilon [a ; b]$

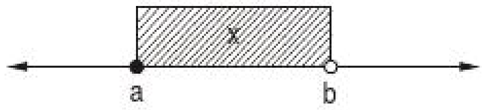
También : $x \varepsilon (a ; b)$

1.3.Intervalo mixto (semi abierto o semi cerrado) :
Considera sólo a uno de sus extremos para :



$a < x \leq b \Leftrightarrow x \varepsilon < a ; b]$

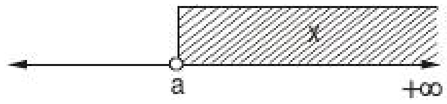
para :



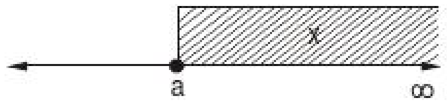
$a \leq x < b \Leftrightarrow x \varepsilon [a ; b >$

2. *Intervalos no acotados :*
Son todos aquellos donde al menos uno de los extremos no es un número real.

2.1. Intervalo acotado inferiormente :



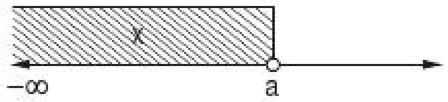
Donde : $a < x < \infty \Leftrightarrow x > a$
$x \varepsilon < a ; \infty >$



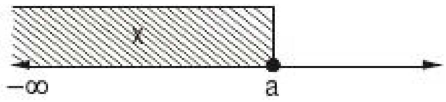
Donde : $a \leq x < \infty \Leftrightarrow x \geq a$

$x \varepsilon [a ; \infty >$

2.2. Intervalo acotado superiormente :



Donde : $-\infty < x < a \Leftrightarrow x < a$
$x \varepsilon < -\infty ; a >$



Donde : $-\infty < x \leq a \Leftrightarrow x \leq a$

$x \varepsilon < -\infty ; a]$

Observaciones :

1. Un conjunto se dice que es acotado si y solo si es acotado superiormente e inferiormente a la vez.

2. Para el conjunto de los números reales R, se tiene :
$R =] -\infty ; \infty [\; = < -\infty ; \infty >$
Es evidente que $-\infty$ y ∞ no son números reales.

3. Como los intervalos son conjuntos, con ellos se podrán efectuar todas las operaciones existentes para conjuntos, tales como la unión, intersección, diferencia simétrica, etc.

Clases de desigualdad

1. ***Desigualdad absoluta :***
Es aquella que mantiene el sentido de su signo de relación para todo valor de su variable. Vemos un ejemplo :

   * $x^2+2x+10>0\ ;\ \forall\, x\,\varepsilon\, R$

2. ***Desigualdad relativa :***
Es aquella que tiene el sentido de su signo de relación para determinados valores de su variable. Veamos un ejemplo :

   * $2x+1>x+3 \rightarrow x>2$

INECUACIONES

Definición

Se denomina inecuación a cualquier desigualdad relativa. Los valores de la variable que verifican la inecuación forman el conjunto solución, el cual se presenta en función de intervalos.

1. ***Inecuaciones racionales :***

1.1. Inecuaciones de primer grado (lineal)

$$\boxed{ax+b \gtrless 0}$$

$a \wedge b\,\varepsilon R\,/\,a \neq 0$

1.2. Inecuaciones de segundo grado (cuadrática)

$$\boxed{ax^2+bx+c \gtrless 0}$$

$a, b \wedge c\,\varepsilon R\,/\,a \neq 0$

Propiedades

I. Trinomio siempre positivo

Si : $ax^2+bx+c>0 ; \forall\, x\,\varepsilon R$,

entonces : $a>0 \wedge b^2-4ac<0$

II. Trinomio siempre negativo

Si : $ax^2+bx+c<0 ; \forall\, x\,\varepsilon R$,

entonces : $a<0 \wedge b^2-4ac<0$

1.3.Inecuaciones de grado superior :

$$\boxed{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n \gtrless 0}$$

$a_0, a_1, a_2, ... \wedge a_n \varepsilon R\,/\,a_0 \neq 0$

$n\,\varepsilon N\,/\,n \geq 3$

1.4. Inecuaciones fraccionarias :

$$\boxed{\frac{F(x)}{H(x)} \gtrless 0 ; [H]^o \geq 1}$$

Resolución de la inecuación : Se recomienda utilizar el método de los puntos de corte cuya aplicación consiste en los siguientes pasos :

1. Se trasladan todos los términos al primer miembro, obteniendo siempre una expresión de coeficiente principal positivo.

2. Se factoriza totalmente a la expresión obtenida.

3. Se calculan los puntos de corte. Son los valores reales de "x" obtenidos al igualar cada factor primo a cero.

4. Se ubican, ordenadamente, todos los puntos en la recta real, dichos puntos originan en la recta dos o más zonas.

5. Se marcan las zonas obtenidas a partir de la derecha alternando los signos "+ " y "-".

6. Si el signo de relación es $>$ o $\geq$, el conjunto solución estará formado por todas las zonas positivas, pero si el signo de relación es $<$ o $\leq$ el conjunto solución lo formarán todas las zonas negativas.

   Ejemplo :
   Resolver la inecuación :

$$x^2+x>6$$

   Resolución : De acuerdo con el método de los puntos de corte, procedemos así :

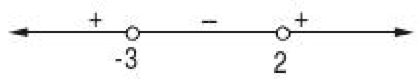
$$x^2+x-6>0$$

   Factorizando : (x+ 3)(x-2) > 0

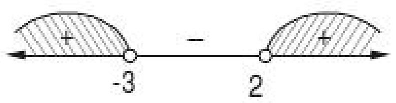
   Hallando puntos : x = -3; x = 2

   En la recta :

   marcando zonas :



   como el signo de relación es $>$ la solución viene dada por todas las zonas positivas.



   $\therefore\ x\,\varepsilon <-\infty ; -3> \cup <2 ; \infty>$

Ejemplo :

Resolver : $\dfrac{9x+10}{x+2} < 2$

Resolución : Procedemos de un modo similar que en el ejemplo anterior :

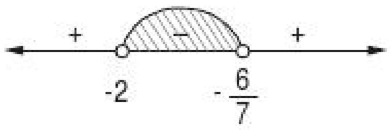
$$\frac{9x+10}{x+2} - 2 < 0$$

$$\frac{7x+6}{x+2} < 0$$

Puntos :

$7x + 6 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{6}{7}$

$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$



$\therefore\ x \, \varepsilon < -2 ; -\dfrac{6}{7} >$

Observación : En una inecuación fraccionaria, si el signo de relación es doble, sólo cerraremos los extremos que provienen del numerador.

Ejemplo :

Resolver : $\dfrac{x^2-5}{x^2-x-12} \geq 1$

Resolución :

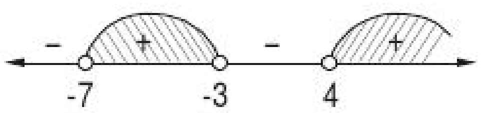
$$\frac{x^2-5}{x^2-x-12} - 1 \geq 0$$

$$\frac{x+7}{x^2-x-12} \geq 0$$

Observar que: $x^2 - x - 12 \equiv (x-4)(x+3)$

$$\frac{x+7}{(x-4)(x+3)} \geq 0$$

Puntos : $\{-7 , 4 \wedge -3\}$



$\therefore\ x \, \varepsilon [-7 ; -3 > \cup < 4 ; \infty >$

2. *Inecuaciones Irracionales*

2.1. ***Forma*** : $\sqrt[2n]{A} > B ; n \, \varepsilon Z^+$

se resuelve :

$S_1 = (A \geq 0 \wedge B \geq 0 \wedge A > B^{2n})$

$S_2 = (A \geq 0 \wedge B < 0)$

$\therefore\ \boxed{CS = S_1 \cup S_2}$

2.2. ***Forma*** : $\sqrt[2n]{A} < B ; n \, \varepsilon Z^+$

$$\boxed{CS = A \geq 0 \wedge B > 0 \wedge A < B^{2n}}$$

2.3. ***Forma*** : $\sqrt[2m]{A} \gtrless \sqrt[2n]{B} ;\ m \wedge n \, \varepsilon Z^+$

$$\boxed{CS = A \geq 0 \wedge B \geq 0 \wedge A^{2n} \gtrless B^{2m}}$$

Ejemplo :

Resolver : $\sqrt{x+1} > x - 1$

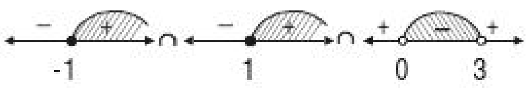
Resolución : De acuerdo con la forma (2.1), se plantea :

$S_1 :\ x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge x+1 > (x-1)^2$

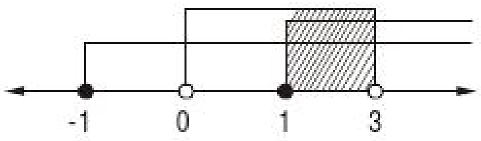
$x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge -x^2 + 3x > 0$

$x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge x^2 - 3x < 0$

$x+1 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge x(x-3) < 0$

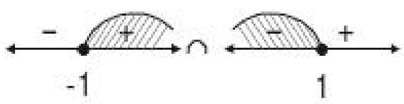


Intersectando :

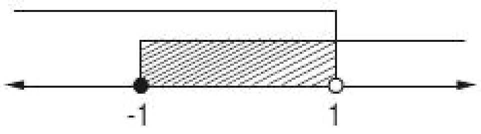


Observar que : $S_1 = [1 ; 3 >$

$S_2 : x+1 \geq 0 \wedge x-1 < 0$



Intersectando :



Observar que : $S_2 = [-1 ; 1 >$

Finalmente : $CS = S_1 \cup S_2$

$\therefore\ CS = [-1 ; 3 >$

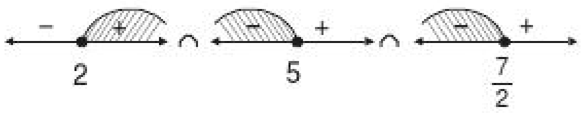
Ejemplo :

Resolver : $\sqrt{x-2} < \sqrt{5-x}$

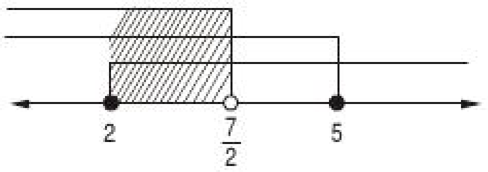
Resolución : De acuerdo con la forma (2.3) se plantea:

$x - 2 \geq 0 \wedge 5 - x \geq 0 \wedge x - 2 < 5 - x$

$x - 2 \geq 0 \wedge x - 5 \leq 0 \wedge 2x - 7 < 0$



Intersectando :



$\therefore\ CS = [2; \frac{7}{2}>$

VALOR ABSOLUTO (V.A.)

Definición

Dado el número real "x", la relación funcional denotada por $|x|$ es el valor absoluto de "x", definido de la manera siguiente :

$$|x| = \begin{cases} x \ ; x > 0 \\ 0 \ ; x = 0 \\ -x \ ; x < 0 \end{cases}$$

Según la definición :

* $|5| = 5 \qquad 5 > 0$
* $|-7| = -(-7) \qquad -7 < 0$
  $|-7| = 7$

Teoremas :

1. $|x| \geq 0 ; \forall x \, \varepsilon R$
2. $|x| = |-x| ; \forall x \, \varepsilon R$
3. $|x.y| = |x|.|y| ; \forall x \wedge y \, \varepsilon R$
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} ; x \wedge y \, \varepsilon R / y \neq 0$
5. $|x^2| = |x|^2 = x^2 ; \forall x \, \varepsilon R$
6. $-|x| \leq x \leq |x| ; \forall x \, \varepsilon R$
7. $|x+y| \leq |x| + |y| ; \forall x \wedge y \, \varepsilon R$

Propiedades :

1. Si : $|x+y| = |x| + |y|$,
   entonces : $xy \geq 0$
2. Si : $|x-y| = |x| + |y|$,
   entonces : $xy \leq 0$

Ecuaciones con valor absoluto :

$$\boxed{|x| = b ; b > 0 \Leftrightarrow x = b \vee x = -b}$$

Ejemplo :

Resolver : $|2x-1| = 7$

Resolución : Observar que : b = 7 > 0. Luego, tenemos :

$$2x - 1 = 7 \ \vee \ 2x - 1 = -7$$
$$2x = 8 \ \vee \ 2x = -6$$
$$x = 4 \ \vee \ x = -3$$
$$\therefore\ CS = \{4 ; -3\}$$

Ejemplo :

Resolver : $|5x-1| = 2 - x$

Resolución : Se plantea lo siguiente :

$$2 - x > 0 \wedge (5x - 1 = 2 \vee 5x - 1 = x - 2)$$
$$x - 2 < 0 \wedge (6x = 3 \wedge 4x = -1)$$
$$x < 2 \wedge (x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{4})$$

Observar que : $x = \frac{1}{2}$ verifica $x < 2$.
$x = -\frac{1}{4}$ verifica $x < 2$.

$$\therefore\ CS = \{\frac{1}{2} ; -\frac{1}{4}\}$$

Inecuaciones con Valor Absoluto

1. $|x| > b \Leftrightarrow x > b \vee x < -b$
2. $|x| < b \Leftrightarrow b > 0 \wedge (-b < x < b)$
3. $|x| \lessgtr |y| \Leftrightarrow (x+y)(x-y) \lessgtr 0$

Ejemplo :

Resolver : $|3x + 4| < 5$

Resolución : De acuerdo con la forma (2), se plantea :

$$\underbrace{5 > 0}_{R} \wedge (-5 < 3x + 4 < 5)$$

¿ ? porque es una verdad

Luego, sólo se resuelve :

$$-5 < 3x + 4 < 5$$
$$-5 - 4 < 3x < 5 - 4$$
$$-9 < 3x < 1$$
$$-3 < x < \frac{1}{3}$$
$$\therefore\ x \, \varepsilon < -3 ; \frac{1}{3} >$$

Ejemplo :

Resolver : $x^2 \geq 3|x| + 4$

Resolución : Se sabe que $x^2 = |x|^2$. Luego, se tendrá :

$$|x|^2 \geq 3|x| + 4$$
$$|x|^2 - 3|x| - 4 \geq 0$$
$$(|x| - 4)(|x| + 1) \geq 0$$

Observa que : $|x| + 1 > 0 ; \forall x \, \varepsilon R$

En consecuencia : $|x| - 4 \geq 0$
$|x| \geq 4$

Según la forma (1) : $x \geq 4 \ \vee x \leq -4$

$$\therefore\ x \, \varepsilon < -\infty ; -4] \cup [4 ; \infty >$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Resolver las siguientes inecuaciones :

I. $\frac{x-3}{2} > \frac{x-2}{5}$ Rpta. ....

II. $(x+2)^2 > x(x-1)$ Rpta. ....

III. $3(x-5) > 5(x-2)$ Rpta. ....

IV. $\sqrt{2}^{x-1} > \sqrt[5]{2}^{x+3}$ Rpta. ....

V. $\sqrt[4]{3}^{x-1} > 3^{x-2}$ Rpta. ....

VI. $0{,}3^{4x-1} > 0{,}3^{x+2}$ Rpta. ....

02. Resolver :

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$$

a) $x < 0$ b) $x > 0$ c) $x \le 0$

d) $x > 4$ e) $x > \frac{2}{5}$

03. Hallar la suma de los enteros que adopta:

$$N = \frac{3x-5}{x-2} \text{ ; si : } x \; \varepsilon < -2;1]$$

a) 4 b) 2 c) 0
d) 1 e) 6

04. Hallar lo indicado en cada caso :

I. $3 < x < 5 \Rightarrow$ .... x^2 ....

II. $-9 < x < -4 \Rightarrow$ .... x^2 ....

III. $-4 < x < 7 \Rightarrow$ .... x^2 ....

IV. $-8 < x < 3 \Rightarrow$ .... x^2 ....

V. $3 < x < 11 \Rightarrow$ .... x^{-1} ....

VI. $-9 < x < -5 \Rightarrow$ .... x^{-1} ....

05. Hallar el valor de : $P = |x - y|$.
Donde : x, y son números enteros positivos que satisfacen las siguientes desigualdades :

$$5x - 3y > 2$$
$$2x + y < 11$$
$$y > 3$$

a) -1 b) 7 c) 1
d) 8 e) 0

06. Si : $-10 < a < -5$; $-2 < b < -1$; $2 < c < 5$, entonces, $\frac{ab}{c}$ está comprendido entre :

a) -10 y -1 b) -10 y 1 c) 2 y 10
d) 2 y 20 e) 1 y 10

07. Si : m, n, p εR^+, y además :

$$K = \frac{m^2+n^2}{mn} + \frac{n^2+p^2}{np} + \frac{m^2+p^2}{mp}$$

Luego, es posible afirmar que :

a) $K \ge 6$ b) $K \ge \frac{1}{3}$ c) $K \ge 12$

d) $K \ge \frac{4}{3}$ e) $K \ge 3$

08. Resolver :

$$\frac{ax-b}{a} < \frac{bx-a}{a} < 1$$

si : $0 < a < b$.

a) $< -1; \frac{2a}{b} >$ b) $< -\infty; -1 >$

c) $< -\infty; \frac{2a}{b} >$ d) $< 1; \frac{2a}{b} >$

e) ϕ

09. Un vehículo, marchando a 25 km/h recorre un camino que mide un número entero de km. Cuando llevaba recorrida la mitad del camino, le faltaba menos de 3h 31min, y cuando llevaba recorridos 60 km le faltaban más de 4h 35min de marcha.
¿Cuál es la longitud del camino?

a) 130 km b) 225 km c) 175 km
d) 170 km e) F.D.

10. Resolver :

I. Si : $x \; \varepsilon [-4;2>$, indicar el intervalo de variación de : $f(x) = 6(x-8)^{-1}$

II. Si : $x \; \varepsilon < 3;5]$, indicar el intervalo de variación de: $f(x) = \frac{2x+6}{x-1}$

III. $x \; \varepsilon < -5;4]$, indicar el intervalo de variación de : $f(x) = x^2 - 6x + 15$

11. Resolver el sistema :

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{3x+5} > (1{,}5)^{x-1} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} \le (0{,}\widehat{6})^{x-6} \end{cases}$$

a) $-3 < x \le 4$ b) $-3 \le x < 4$
c) $0 \le x < 3$ d) $0 < x \le 4$
e) $-2 < x \le 4$

12. Hallar el valor de, $E = \frac{x-y}{z}$, si :

x, y, z, son enteros positivos que satisfacen las siguientes desigualdades :

$$2x+3y+5z>23$$
$$2x-y+5z<13$$
$$y-z>1$$
$$y<4$$

a) 2/5 b) 1/2 c) 0
d) 1 e) 2

13. Si : a > b > 0; x > 0 con relación a :

$$c = 1+\frac{a-b}{b+x},$$

podemos afirmar que :

a) $1 < c < \frac{a}{b}$ b) $b < c < a$

c) $\frac{a}{b} < c < 1$ d) $a < c-1 < 1$

e) $a < c < b$

14. Se sabe que el cuádruplo del número de objetos que hay dentro de un depósito, es tal, que disminuido en 5, no puede exceder de 35 y que el quíntuplo del mismo número de objetos, aumentado en 2 no es menor que 50. Hallar este número.

a) 20 b) 18 c) 16
d) 10 e) No es posible

15. Un closet tiene capacidad para 60 trajes, pero, sólo hay cierto número de trajes guardados en él. Si el número de trajes se redujera a la sexta parte se ocuparía menos de la décima parte de su capacidad; pero si se duplicara el número de trajes; más de ocho trajes no podrán ser guardados por falta de espacio. ¿Cuántos trajes hay en dicho closet?

a) 20 b) 25 c) 30
d) 35 e) 40

16. De las siguientes proposiciones :

I. $\forall a,b,c,\varepsilon R^{+}: a+b+c \geq \sqrt[3]{abc}$

II. $\forall x\, \varepsilon R^{+} \wedge x \neq 1 : x+\frac{1}{x} > 2$

III. $\forall a,b,c,\varepsilon R^{+}$.

Si: $a+b+c=12 \rightarrow abc \leq 64$,

Indicar el valor de verdad de cada una.

a) VFV b) VVV c) VFF
d) FVF e) FFF

17. Para : a > 0 y b > 0.
¿Cuál de las siguientes expresiones es verdadera?

a) $\sqrt{ab} < \frac{2ab}{a+b}$ b) $\sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

c) $\sqrt{ab} - a = \frac{2ab}{a+b}$ d) $\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

e) $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

18. Sean p, q, r, tres números positivos diferentes, que cumplen : pqr = 1.
Entonces, la suma : s = p+ q+ r satisface.

a) s> 3 b) 3 ≥ s< 4
c) 0 < s< 3 d) s< 3
e) 1 < s< 2

19. Sean : a, b ε R / ab > 1; el menor valor :

$E = \frac{a^2+ab+b^2}{\sqrt{ab-1}}$; es :

a) 2 b) 3 c) 6
d) 8 e) 9

20. Sea : x > 0; calcular el mínimo valor de la expresión :

$$K = x+\frac{4}{x^2}$$

a) $\sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ e) 3

21. Resolver el sistema :

$$3x + y > -4$$
$$x - 2y < -7$$
$$2x + 3y < 6$$

{ x; y} ⊂ Z. Indicar "xy".

a) -2 b) -6 c) 3
d) 6 e) 10

22. La suma de los dos números enteros positivos es mayor que 76; su diferencia menor que 10, y si al mayor se le suma el duplo del menor, el resultado no llega a 112. ¿Cuál es el mayor?

a) 34 b) 38 c) 42
d) 43 e) 83

23. Si : x, y, z εR^+ , hallar el máximo valor de "a" en :

$$\frac{x^4+y^4+z^4+w^4}{xyzw} \geq a$$

a) 1 b) 2 c) 4
d) $\sqrt{2}$ e) 8

24. Cuando nací, papá tenía más de 20 años; hace 10 años el doble de mi edad era mayor que la de él; si tengo menos de 33 años, ¿qué edad tiene él?

a) 32 b) 53 c) 52
d) 54 e) 45

25. Si : "S" es la suma de "n" cantidades positivas a, b, c, ..., entonces :

$$E=\frac{S}{S-a}+\frac{S}{S-b}+\frac{S}{S-c}+...$$

resulta :

a) $E \geq n^2$ b) $E \geq \frac{n^2}{n-1}$
c) $E \geq \frac{n}{n+1}$ d) $E \geq \frac{n^2}{n+1}$
e) $E \geq n^2-1$

26. Sean : a, b εR^+ , tal que : a + b = 1.
Si :

$$M \leq \frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1} < N ,$$

entonces, MN resulta :

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{4}$

27. A qué número entero se aproxima :

$$S=1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{10^6}}$$

a) 14 669 b) 14 999 c) 14 866
d) 14 999 e) 14 899

28. Sean : a, b, c; números no negativos, tales que : a+ b+ c = 1, hallar el máximo del producto :

$$P=a^5b^3c^2$$

Indicar la suma de las cifras de 10^8P .

a) 12 b) 13 c) 14
d) 18 e) 20

29. Si : 0 < b < a, Además :

$$K=\frac{a^2}{b(a+b)}+\frac{b^2}{a(a-b)} ;$$

luego, podemos afirmar que :

a) $K \leq -2$ b) $K \geq -1$ c) $K \geq 0$
d) $K \geq \sqrt{8}$ e) $K \geq \sqrt{8}-1$

30. Si : a > 0 y $P=(1+a)-\sqrt{\frac{1}{4}+a}$, luego :

a) P > 1 b) P > $\frac{1}{2}$ c) P > 0
d) P > $-\frac{1}{2}$ e) P > 20

31. Resolver cada ecuación cuadrática :

I. $x^2-12x \leq 35$
II. $2(x^2+1) > 5x$
III. $-x^2+6x-5 < 0$
IV. $(x+1)^2+(x-2)^2 \geq 29$

32. Resolver cada inecuación de segundo grado :

I. $x^2-3x+1 < 0$
II. $2x^2+9x+3 \geq 0$
III. $x^2+5x+8 > 0$
IV. $x^2-2x+5 < 0$

33. Determinar "m+ n", si la inecuación :

$$x^2-mx+n < 0$$

presenta como conjunto solución :

$$x \varepsilon < -5 ; 3 >$$

a) -13 b) -17 c) -15
d) -2 e) 2

34. Determinar el menor valor de "E", si se cumple :

$$x^2-2x+5 \leq E$$

se verifica para todo $x \varepsilon R$.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

35. Resolver cada desigualdad :

I. (x + 1)(x - 3)(x + 4) > 0
II. $(x-1)^2(x+2)^3(x-5)^5 < 0$
III $(x-6)(x-4)^2(x-1)(x+3)^2 \geq 0$
IV. $(x-1)(2-x)(x-3) \geq 0$

36. Resolver : $x^4-3x^3+5x^2-9x+6<0$

a) $x\,\varepsilon <-\infty;2>\cup<3;+\infty>$

b) $x\,\varepsilon <-\infty;1>\cup<2;+\infty>$

c) $x\,\varepsilon R$

d) $x\,\varepsilon\,\phi$

e) $x\,\varepsilon <1;2>$

37. Después de resolver : $x^3+4x^2-2x-8<0$
Señalar el mayor entero que verifica la desigualdad.

a) 0 b) 2 c) -2
d) -1 e) 1

38. Resolver :

I. $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5}\le 0$

II. $x\ge\dfrac{1}{x}$

III. $x^2\le\dfrac{1}{x}$

39. Resolver las inecuaciones :

I. $\sqrt{x-3}\ge 2$

II. $\sqrt{x-5}<3$

III. $\sqrt{x-8}\ge -3$

IV. $\sqrt{x-3}\le 0$

40. Indicar el intervalo solución de :

$$\sqrt{x-3}\le\sqrt{7-x}$$

a) $[3;7]$ b) $[3;5]$ c) $[5;7]$

d) $<-\infty;5]$ e) $[5;\infty>$

41. Resolver las inecuaciones :

I. $x^3\ge 9x$

II. $x^4-18<7x^2$

III. $(x-5)(x^2-3)>4(x-5)$

42. Resolver la inecuación : $x^2(x^2-3)>4x(x^2-3)$
e indicar un intervalo solución.

a) $<-\sqrt{3};\sqrt{3}>$ b) $<0;\sqrt{3}>$

c) $<\sqrt{3};4>$ d) $<-\sqrt{3};0>$

e) $<-\infty;0>$

43. Al resolver :

$$\frac{x+1}{2-x}\le\frac{x}{x+3}$$

se obtuvo como solución :

$$<-\infty;a>\cup<b;\infty>$$

Hallar : ab + a + b.

a) -1 b) -5 c) -6
d) -7 e) -8

44. Resolver :

$$\frac{(1-x)(x+x^2)}{-x^2-x+2}\le 0$$

a) $<-\infty;-2>\cup<0;1]$

b) $<-\infty;2]\cup[3;4>$

c) $<-\infty;-2>\cup<-1;0>$

d) $<-\infty;-2>\cup[-1;0]$

e) ϕ

45. Sean las funciones :

$f(x)=x^2+5x+2m$

$g(x)=2x^2+13x+m+4$

¿Qué raro?, se observa que al darle cualquier valor a "x" se obtiene que f(x)< g(x), entonces, "m" es :

a) Mayor que 12. b) Menor que -12.
c) Está entre -12 y 12.
d) Mayor que -12. e) Menor que 12.

46. Indicar el menor número "n" entero que permita :

$$\left(\sqrt{3}+2+x\right)\left(\sqrt{3}-2-x\right)<n$$

se verifique para todo "x" real.

a) 4 b) 2 c) 3
d) 6 e) 10

47. El conjunto :

$$A=\left\{x\,\varepsilon R/\frac{(x^2-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}\ge 0\right\}, \text{ es :}$$

a) $[-2;-1>\cup<1;+\infty>$

b) $[-2;-1>$

c) $[-2;-1>\cup<-1;1>\cup<1;+\infty>$

d) $<-\infty;-2]\cup<-1;+\infty>$

e) $<-\infty;-2>\cup<1;+\infty>$

48. ¿Para qué valores de "a" en la inecuación cuadrática siguiente, se cumple que para todo $x \varepsilon R$:

$$x^2 + ax - 2 < 2x^2 - 2x + 2 \ ?$$

a) $a \varepsilon < -6 ; 2 >$

b) $a \varepsilon < -10 ; -7 >$

c) $a \varepsilon < 1 ; 3 >$

d) $a \varepsilon < -15 ; -10 >$

e) $a \varepsilon < 3 ; 6 >$

49. Determinar en qué conjunto de números negativos debe estar contenido "x", para que :

$$\frac{x^4 - 17x^2 + 60}{x(x^2 - 8x + 5)} > 0$$

a) $< -\sqrt{12} ; -\sqrt{5} >$ b) $< -\infty ; -\sqrt{12} >$

c) $< -12 ; 0 >$ d) $< -\infty ; -\sqrt{5} >$

e) $< -\sqrt{5} ; 0 >$

50. Sean : $a, b \varepsilon R$, con $0 < a < b$.
Entonces, el conjunto :

$$A = \{x \varepsilon R / \frac{1+2b}{1+2a} < \frac{x+b}{x+a} < \frac{b}{a}\}$$

coincide con :

a) $< a ; b >$ b) $< 0 ; \frac{1}{2} >$

c) $< a ; 2b >$ d) $< 2a ; 2b >$

e) $< 0 ; 1 >$

51. Luego de resolver :

$$x - \sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 7x - 6} > 2,$$

indicar la suma de valores enteros de "x".

a) 1 b) 2 c) –1
d) –2 e) 0

52. De la inecuación :

$$\frac{ax+1}{bx+1} \geq \frac{x+a}{x+b}$$

con : $a > b > 1$.
Hallar el conjunto solución.

a) $< -b ; -1]$

b) $[-\frac{1}{b} ; 1]$

c) $[-1 ; 1]$

d) $< -\infty ; -b > \cup [-1 ; -\frac{1}{b} > \cup [1 ; \infty >$

e) $< -\infty ; -b]$

53. Resolver :

$$\frac{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}\,(x^2 - 5x)}{x - 1} \geq 0$$

a) $x \ \varepsilon \ \phi$ b) $x \varepsilon R$ c) $x \ \varepsilon [2; 4]$
d) $x \ \varepsilon \{2; 4\}$ e) $x \ \varepsilon < 1; 7 >$

54. Si : "S" es el conjunto solucion de la desigualdad :

$$\frac{x^{13}(x+3)^{16}(x-5)^{30}}{(x^3 - 27)(4x + 16)} \geq 0$$

entonces, es verdad que :

a) $[-4 ; 0] \subset S$

b) $[3 ; +\infty > \subset S$

c) $S = < -4 ; 0] \cup < 3 ; +\infty >$

d) $[0 ; 3 > \cap S = \phi$

e) $\{-3\} \not\subset S$

55. Determinar el valor de verdad de las proposiciones :

I. Si : $x \varepsilon < -1; 5 > \Rightarrow \frac{3}{2x+5} \varepsilon < 0 ; 1 >$

II. Si : $x \varepsilon [0 ; 4 > \Rightarrow \sqrt{\frac{16-x}{x+2}} - \sqrt{x} + 1 > 0$

III. Si : $\frac{x-1}{x+3} > x \Rightarrow x < -3$

a) FVV b) FVF c) FFV
d) FFF e) VVV

56. Resolver :

$$x - \sqrt{x^2 - ax - 2a^2} > a$$

Si : $a < 0$.

a) $< 3a ; -2a >$

b) $[-a ; \infty >$

c) $< 2a ; a > \cup < -a ; \infty >$

d) $< 2a ; a > \cup < -2a ; \infty >$

e) $< -\infty ; 3a > \cup < -a ; \infty >$

57. Determinar, por extensión, el conjunto :

$$A = \{x \varepsilon R / x^2 - 4x + 2 < 2x - 10\}$$

a) $\{-1 ; 0 ; -1\}$ b) $< -1 ; 0 >$

c) $[-2 ; 3]$ d) $\{ \ \}$

e) $< 0 ; 1 >$

58. Al resolver :

$$(2x^2+1)(x^2+5x+1)>0$$

se obtiene como solución :

$$x \varepsilon R-[m;n]$$

Calcular : mn.

a) 1 b) -3 c) -4
d) -1 e) 0

59. Sea : $\sqrt[6]{x+7}(x-5)\geq 0$

¿Entre qué valores está : $\dfrac{x+1}{x}$?

a) $<\dfrac{3}{5};\dfrac{7}{5}]$ b) $<0;\dfrac{6}{5}]$ c) $<-\infty;\dfrac{6}{5}]$

d) $<1;\dfrac{2}{5}]$ e) $<1;\dfrac{6}{5}]$

60. Dado : $f(x)=ax^2+bx+c$, tal que :
$x \varepsilon R$; $f(x)\geq 0$.
Hallar el mínimo valor positivo de :

$$A=\frac{a+b+c}{b-a}$$

a) 2 b) $\dfrac{5}{2}$ c) 3

d) $\dfrac{7}{2}$ e) 4

61. ¿Cuántas de las proposiciones siguientes son verdaderas?

I. Si : $\sqrt{x^2}>1$, entonces, $x>1$

II. Si : $\sqrt{-x}>1$, entonces, $x^2>1$

III. Si : $x<-1$, entonces, $x^2<1$

IV. Si : $x>1$, entonces, $x^2>1$

V. Si : $x^2<1$, entonces, $x<1$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

62. Resolver las inecuaciones :

I. $\sqrt{x-3}\geq 2$

II. $\sqrt{x-5}<3$

III. $\sqrt{x-8}\geq -3$

IV. $\sqrt{x-3}\leq 0$

63. Indicar el intervalo solución de :

$$\sqrt{x-3}\leq\sqrt{7-x}$$

a) [3;7] b) [3;5] c) [5;7]

d) $<-\infty;5]$ e) $[5;\infty>$

64. Sea "S" el conjunto solución de :

$$\sqrt{1-x}-\sqrt{1-3x}>\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}$$

entonces :

a) $S\subset[-4;1>$

b) $S=<-3;-1>\cup<0;\dfrac{1}{2}>$

c) $S\subset[-5;0>$

d) $S=<-3;-1>\cup<0;\dfrac{1}{3}>$

e) $S\subset<-2;2>$

65. ¿Cuántos valores enteros verifican la inecuación :

$$\sqrt{\frac{3-x}{x+3}}+\sqrt{x+13}>3 \quad ?$$

a) 6 b) 7 c) 5
d) 4 e) 3

66. Hallar el intervalo formado por los valores de "x" que satisfacen la siguiente desigualdad :

$$\frac{2x\sqrt{x-2}-4\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}\,(x-4)}>1$$

a) $<4;\infty>$ b) $<2;4>$ c) $<2;\infty>$

d) $<0;\infty>$ e) $<-2;4>$

67. Resolver :

$$\sqrt{\frac{3x-2}{x+3}}<2$$

e indicar el número de valores enteros que no la verifican.

a) 12 b) 13 c) 14
d) 15 e) 16

68. El conjunto solución de la desigualdad :

$$\sqrt{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x-4}}\geq x-6$$

está contenido en :

a) [1; 4] b) $[4;8>$ c) $<4;6>$

d) $[8;+\infty>$ e) $<-\infty;4]$

69. El conjunto solución obtenido al resolver :

$$\sqrt{x^2-x+1}<\sqrt{4-x}$$

es : $<a;b>$. Indicar : a.b

a) 4 b) 6 c) 8
d) -3 e) -5

70. Hallar el intervalo solución de la inecuación :

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{4-\sqrt{1-x}}<0$$

a) $[-1;1]$ b) $<\frac{1}{4};1]$ c) $<0;1]$

d) $<\frac{1}{2};2>$ e) $<-15;1>$

71. Luego de resolver :

$$\sqrt{\sqrt[4]{2-x}+\sqrt{x+2}}>x-3$$

Indicar la suma de los extremos finitos del intervalo solución.

a) 0 b) 2 c) 1
d) -1 e) -2

72. Resolver :

$$\sqrt{x^2-8x-20}+\sqrt{13-x}>-3$$

a) $<-\infty;-10]\cup[2;13]$

b) $[13;+\infty>$

c) $<-\infty;-2]\cup[10;13]$

d) $[-2;10]\cup[13;+\infty>$

e) ϕ

73. Indicar el intervalo solución al resolver :

$$3x\le\sqrt{x^2-6x+8}$$

a) $[0;1]\cup[8;+\infty>$

b) $<0;2>\cup<4;+\infty>$

c) $[0;2]\cup[4;+\infty>$

d) $<-\infty;0]\cup[4;+\infty>$

e) $<-\infty;\frac{-3+\sqrt{73}}{8}]$

74. Resolver :

$$\frac{-\sqrt{\sqrt[3]{x}-4}+\sqrt[6]{x}}{x-1}\ge 0$$

Indicar el conjunto no solución.

a) R b) $[0;64>$ b) $<0;64>$

d) $<-\infty;64>$ e) $R-<8;+\infty>$

75. Resolver :

$$\sqrt{\frac{32-2x}{x+2}}\ge\sqrt{x}$$

Indicar cuántos valores enteros la verifican.

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e)12

76. Resolver :

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+x}<\sqrt{x}$$

a) $<\frac{\sqrt{2}-1}{2};\infty>$

b) $<\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2};\infty>$

c) $<\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1}{2};\infty>$

d) $<\frac{\sqrt{4\sqrt{2}+1}-1}{2};\infty>$

e) $<\frac{\sqrt{2}}{2};\infty>$

77. Considerar los 4 pasos para resolver la desigualdad :

$$\frac{1}{x+9}\le\frac{1}{\sqrt{81-x^2}}$$

Paso 1 : $\sqrt{81-x^2}\le x+9$

Paso 2 : $81-x^2\le(x+9)^2$

Paso 3 : simplificando

$$\left(x+\frac{9}{2}\right)^2+\frac{315}{4}\ge 0$$

Paso 4 : $x\,\varepsilon\,R$, por lo tanto, la solución es todo R.

Entonces, se puede decir que :

a) Todos los pasos son correctos.
b) El primer error se comete en el paso 1.
c) El primer error se comete en el paso 2.
d) El primer error se comete en el paso 3.
e) El único error se comete en el paso 4.

78. Al resolver : $\frac{|\sqrt{x-2}-6|-\sqrt{x-2}}{|x^2-9|}\ge 0$, se obtiene un conjunto solución de la forma:

$[a;b>\cup<c;d]$.

Dar como respuesta : $\frac{(a+d)}{(b+c)}$.

a) 11/5 b) 9/7 c) 10/3
d) 13/6 e) 12/7

79. Al resolver la ecuación :
$\sqrt{x^2-24x+144}-\sqrt{x^2-12x+36}\geq\sqrt{x^2-6x+9}$,

se obtiene un conjunto solución de la forma : [a; b]. Hallar : a + b.

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

80. El conjunto solución de la inecuación :

$$\frac{\sqrt{2-|x|}.(1-x^2)}{(|x+3|+x-1)(|x|-2)}\geq 0$$ es:

a) $<2;2>$ b) $[1;2>$
c) $[1;1]$ d) $<-2;-1]$
e) $<-2;-1]\cup[1;2>$

81. Resolver :

$$\frac{|x-3|-|4-x|}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}}<\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}{|x-4|+|3-x|}$$

a) $x\,\varepsilon[2;1>$ b) $x\,\varepsilon[2;3>$
c) $x\,\varepsilon[2;4>$ d) $x\,\varepsilon[2;9>$
e) $x\,\varepsilon[2;7>$

82. Resolver : $|2x+3|=6$, e indicar la suma de soluciones.

a) 0 b) 8 c) -3
d) 4 e) 1

83. Una solución de :
$|2x+3|=|x-1|$ es :

a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) 4
d) $-\frac{1}{4}$ e) $\frac{3}{2}$

84. Luego de resolver :
$$\left|\left|x^3-5x^2\right|-x|3x-15|-|4x-20|\right|=0$$
Indicar la suma de soluciones obtenidas.

a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 2

85. Hallar los valores de "x" en :
$$|5-|x-3||=|4+|x-3||$$
Indicar la suma de estos.

a) -2 b) 0 c) 5
d) 6 e) 4

86. Hallar el conjunto solución de la ecuación mostrada :
$$\left|\left|x^2-x+3\right|-x^2-5x+\sqrt[4]{4}\right|=\left|6x-\sqrt{2}-3\right|$$

a) $\{1;\sqrt{2}\}$ b) $\{\sqrt{2};3\}$ c) $\{\sqrt{2};\sqrt{3}\}$
d) R e) { }

87. Indicar el producto de soluciones de la ecuación :
$$\left||x-5|+|x-4|\right|=5$$

a) 7 b) 10 c) 35
d) 14 e) 5

88. Luego de resolver :
$$|x-8|-|x-7|=1$$
¿Para cuántos valores se verifica la ecuación mostrada?

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) Infinitos

89. Hallar el único valor entero que verifica la ecuación :

$$|x-1|+|x^2-x|+|x^3-x^2|+|x^4-x^3|+...+|x^{n+1}-x^n|=0$$

a) 2 b) -1 c) 0
d) $\sqrt[4]{4}$ e) $\sqrt[6]{64}-1$

90. Resolver :

$$\left|\frac{x^2}{x-1}\right|=\left|\frac{x^2-16}{x+4}\right|$$

Indicar el conjunto solución :

a) ϕ b) {2} c) $\{\frac{1}{4}\}$
d) $\{\frac{4}{3}\}$ e) $\{\frac{4}{5}\}$

91. Resolver :

$$\left|x+\frac{8}{x}\right|\leq 6$$

a) [-4; 4] b) [-2; 2]
c) [-3; 3] d) $[-4;-2]\cup[2;4]$
e) $[-4;-3]\cup[3;4]$

92. Resolver :

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2$$

a) R^+ b) R^- c) R - {0}
d) $[2;+\infty>-\{5\}$ e) R

93. Resolver :

$$\left|\frac{5}{2x-1}\right| \geq \left|\frac{1}{x-2}\right|$$

e indicar un intervalo solución.

a) $<-\infty;1>$ b) $<\frac{1}{2};5>$ c) $<3;+\infty>$

d) $[3;+\infty>$ e) $<\frac{1}{2};\frac{11}{7}]$

94. Si : a, b, m ε R.
Resolver para "x".

$$|mx-ab| \leq |x||m-b| + |b||x-a|$$

a) R^+ b) R^- c) R

d) R_o^+ e) R_o^-

95. Resolver :

$$|2x| < |x-2006| + |x+2006|$$

e indicar el número de valores enteros de "x".

a) 4010 b) 4009 c) 4011
d) 2006 e) 2001

96. Resolver :

$$\frac{x}{|x|-6} > 0$$

e indicar un intervalo solución.

a) $[-6;0>$ b) $<2;5>$ c) $<-\infty;-6>$

d) $<6;+\infty>$ e) $<0;+\infty>$

97. Resolver :

$$\frac{x^2|x|-1}{x^3-1} \geq 0$$

a) $[-1;1>$ b) R_o^+ c) [-1; 1]

d) $[-1;+\infty> - \{1\}$ e) R - {1}

98. Hallar el máximo de :

$$|x| - |x - 2006|$$

a) -2006 b) 2006 c) -2005
d) 2005 e) 2004

99. Resolver : $|3x - 1| < |2x - 3|$

a) $<-\infty;-2> \cup <\frac{4}{5};\infty>$ b) $<-\frac{4}{5};4>$

c) $<-4;-\frac{4}{5}>$ d) $<-2;\frac{4}{5}>$

e) $<-4;\frac{4}{5}>$

100. Si : $|x| = 3\sqrt{3}+4\sqrt{2}$, y

$|y| = 3\sqrt{6}+\sqrt{27}$

entonces :

a) $x + |y| < 0$ b) $-|y| < x$
c) $|x| - |y| > 0$ d) $|y| \leq x$
e) $|y| - |x| <$ |

101. Al resolver :

$$|xy-1| < y-1006$$

hallar la variación de "x", si "y" toma su mínimo valor entero.

a) $5 < x < 10$ b) $0 < x < 1$
c) $1 < x < 2$ d) $-1 < x < 0$
e) $-1 < x < 1$

102. Resolver :

$$(x-2)^2 + |x-2| < 6$$

a) $<-2;4>$ b) $<0;4>$ c) $<1;5>$

d) $<1;4>$ e) $<-2;5>$

103. Resolver :

$$||x-1|+x| > \sqrt{-x}$$

a) $<-1;0]$ b) $[0;1>$ c) $<-5;0]$

d) $<-\infty;0]$ e) ϕ

104. Resolver : $|3x + 8| < 9x + 1$.

a) $<-\infty;-\frac{3}{4}> \cup <-\frac{1}{9};\frac{7}{6}>$

b) $<-\infty;-\frac{3}{4}>$ c) $<-\frac{1}{9};\frac{7}{6}>$

d) $<\frac{7}{6};\infty>$ e) $<-\frac{3}{4};\frac{7}{6}>$

105. Resolver :

$$\frac{|2x+3|-|x-8|}{|2x-1|-|7x-8|} \geq 0$$

Indicando su intervalo solución.

a) $x\,\varepsilon[-11;1> \cup <\frac{7}{5};\frac{5}{3}]$

b) $x\,\varepsilon[-11;0> \cup <\frac{7}{4};\frac{5}{2}]$

c) $x\,\varepsilon[-11;1> \cup <\frac{7}{5};\frac{5}{3}]$

d) $x\,\varepsilon[-11;0> \cup <\frac{7}{5};\frac{5}{3}]$

e) $x\,\varepsilon[1;\frac{7}{5}> \cup <\frac{5}{3};+\infty]$

106. Dados los conjuntos :

$A = \{x \varepsilon R / |x-2| < |x+1|\}$

$B = \{x \varepsilon R / |x-4| + |x-2| < |x+3|\}$

entonces : $A \cap B$ es igual a :

a) $<1;9>$ b) $<1;\infty>$ c) $<\frac{1}{2};\infty>$

d) $<1;\infty>$ e) $<\frac{1}{2};2>$

107. Al resolver :

$x^2 + x + |x| + 1 \leq 0$, podemos afirmar :

a) $x = \{-1\}$ b) $x = \{0; 1\}$
c) $x > 0$ d) $x < 0$
e) $x \varepsilon \phi$

108. Resolver :

$$\frac{|x|}{x-2006} < 0$$

a) $<-\infty;2006> - \{0\}$ b) $<-\infty;2006>$

c) $R - \{2006\}$ d) $R^+ - \{2006\}$
e) R

109. Resolver :

$$|x^4 - 10| \leq |x^2|^2 + 8x^2$$

e indicar un intervalo solución.

a) $[2;+\infty>$ b) $<-\infty;0>$ c) $<0;+\infty>$

d) $<-\infty;-1>$ e) $[1;+\infty>$

110. Resolver :

$$|7x-1| \leq |3x+1| + |2-4x|$$

a) $<0;1>$ b) $[0; 1]$ c) R^+

d) R_o^+ e) R

111. Resolver e indicar un intervalo solución de :

$$||2-x|-3| < 1$$

a) $<-2;0>$ b) $[4;6>$ c) $[-2;0>$

d) $<-3;0>$ e) $<4;7>$

112. Resolver :

$$||x-1| + x^2| \leq x^2 + 3$$

a) $[0; 5]$ b) $[-6; 1]$ c) $[-8; 4]$
d) $[-8; 2]$ e) $[-2; 4]$

113. Dados los conjuntos de números reales :

$S = \{p \varepsilon R / 2p + 3 < 6 - p\}$

$T = \{q \varepsilon R / |aq + b| < |a + b - aq| ; -2b < a < 0\}$

Entonces : $S \cap T$, es :

a) R b) $<0;1>$ c) $<0;\frac{1}{2}>$

d) $<-\infty;1>$ e) $<\frac{1}{2};1>$

114. Dadas las inecuaciones :

$|x| + y < 1$

$x - y < 1$

Hallar el conjunto de valores de "y", cuando "x" toma su mayor valor entero.

a) $<-\infty;0>$

b) $<-1;1>$

c) $<-\infty;1>$

d) $<-\infty;1> \cup <1;2>$

e) $<-\infty;2> \cup <2;4>$

115. Si : $|x| < 3$, entonces :

$$\frac{1}{a+6} < \left|\frac{1}{4-x}\right| < a$$

Luego, de "a", se puede afirmar :

a) $a < 1$ b) $a < \frac{1}{2}$ c) $a \leq 1$

d) $a \geq 1$ e) $a \leq \frac{1}{4}$

116. Resolver : $|x^2 - 3| > x^2 + x$

a) $<-\infty;-3> \cup <-\frac{3}{2};\infty>$

b) $<-\infty;-3> \cup <-\frac{3}{2};1>$

c) $<-\infty;3> \cup <1;+\infty>$

d) $<-3;+\infty>$

e) $<-3;-\frac{3}{2}> \cup <1;\infty>$

117. Resolver la desigualdad :

$$|x-4|+|2x+6|>10$$

Dar como respuesta la suma entre el mayor valor entero negativo y el menor entero positivo que verifica la desigualdad.

a) 5 b) – 4 c) 1
d) – 2 e) 3

118. Si el conjunto :

$$A=\{x\,\varepsilon R/\sqrt{x^2-1}-\sqrt{|x-1|}\geq 0\},$$

entonces, el conjunto R-A está dado por :

a) ϕ b) $[-2;2]$ c) $<-2;2>$
d) $<-2;1>$ e) $[-2;1]$

119. Dadas las desigualdades :

$$\sqrt[3]{x^2y^2+2}\,(x-2)<0$$

$$(y-3)|\,1+|axy|\,|>0\,;a<0$$

Luego, podemos afirmar que "x–y" es :

a) Menor que –2. b) Menor que 0.
c) Menor que 2. d) Menor que –1.
e) Menor que 1.

120. Resolver :

$$1\leq\frac{1}{|x|-1}\leq 2$$

e indicar un intervalo solución.

a) $<1;2]$ b) $[-2;-1>$ c) $[\frac{3}{2};+\infty>$
d) $<-\infty;-\frac{3}{2}]$ e) $[\frac{3}{2},2]$

Claves

01.	-	31.	-	61.	c	91.	d
02.	a	32.	-	62.	-	92.	c
03.	b	33.	b	63.	b	93.	d
04.	-	34.	d	64.	d	94.	c
05.	c	35.	-	65.	a	95.	c
06.	e	36.	e	66.	a	96.	d
07.	a	37.	e	67.	d	97.	d
08.	a	38.	-	68.	b	98.	b
09.	c	39.	-	69.	d	99.	d
10.	-	40.	a	70.	c	100.	b
11.	a	41.	-	71.	a	101.	b
12.	e	42.	b	72.	c	102.	b
13.	a	43.	d	73.	e	103.	a
14.	d	44.	d	74,	d	104.	d
15.	d	45.	d	75.	a	105.	a
16.	b	46.	a	76,	d	106.	a
17.	e	47.	c	77.	b	107.	e
18.	a	48.	a	78.	d	108.	a
19.	c	49.	a	79.	c	109.	e
20.	e	50.	b	80.	b	110.	e
21.	b	51.	a	81.	c	111	a
22.	d	52.	d	82.	c	112.	e
23.	c	53.	d	83.	b	113.	e
24.	b	54.	c	84.	b	114.	b
25.	b	55.	e	85.	d	115.	d
26.	d	56.	b	86.	d	116.	b
27.	b	57.	d	87.	d	117.	b
28.	d	58.	a	88.	e	118.	d
29.	e	59.	e	89.	e	119.	d
30.	b	60.	c	90.	e	120.	e

Capítulo
15 FUNCIONES

RELACIONES

1. Definiciones Previas

1.1. Par ordenado :
Es un conjunto de dos elementos considerados en un determinado orden. Si los elementos del par ordenado son "a" y "b", al conjunto se le denota por (a; b) y se define de la manera siguiente :

$$\boxed{(a;b) = \{\{a\};\{a;b\}\}}$$

Donde :
a = primera componente del par
b = segunda componente del par

Propiedades :

I. $(a;b) \neq (b;a);\ \forall a \neq b$

II. $(a;b) = (c;d) \rightarrow a = c \wedge b = d$

1.2. Producto Cartesiano :
Dados los conjuntos no vacíos A y B, el producto cartesiano de A por B (en ese orden), se denota así $A \times B$ y se define de la siguiente manera :

$$\boxed{A \times B = \{(a;b) / a \,\varepsilon\, A \wedge b \,\varepsilon\, B\}}$$

Donde :
A = conjunto de partida
B = conjunto de llegada

Ejemplo : Dados los conjuntos :

$$A = \{1; 2; 3\} \wedge B = \{-1; 2\}$$

Determinar : $A \times B \wedge B \times A$

Resolución :

Para , $A \times B$, tenemos :

$$A \times B = \{1; 2; 3\} \wedge \{-1; 2\}$$

$$A \times B = \{(1;-1), (1;2), (2;-1), (2;2), (3;-1), (3;2)\}$$

Para $B \times A$, tenemos :

$$B \times A = \{-1; 2\} \wedge \{1; 2; 3\}$$

$$B \times A = \{(-1;2), (-1;2), (-1;3), (2;1), (2;2), (2;3)\}$$

Propiedades :

I. El producto cartesiano no es conmutativo :

$$\boxed{A \times B \neq B \times A}$$

II. El número de elementos $A \times B$ es igual al número de elementos de $B \times A$ y se obtiene según la fórmula :

$$\boxed{n(A \times B) = n(B \times A) = n(A).n(B)}$$

2. Relación Binaria

2.1. Definición :
Dados dos conjuntos no vacíos A y B, se dice que R es una relación de A en B (en ese orden), si y sólo si, R es un subconjunto de $A \times B$, es decir :

$$R \subset A \times B$$

$$\boxed{R = \{(a;b) / a \,\varepsilon\, B \wedge b \,\varepsilon\, B \wedge a\,R\,b\}}$$

Donde :
a R b, indica la relación que existe entre los componentes "a" y "b".

Ejemplo : Dados los conjuntos :

$$A = \{1; 2; 4\} \wedge B = \{2; 3\}$$

Determinar la relación de R de A en B definida de la manera siguiente :

$$R = \{(a;b) / a \,\varepsilon\, A \wedge b \,\varepsilon\, B \wedge a < b\}$$

Resolución :
Hallar el producto cartesiano de A por B.

$$A \times B = \{1; 2; 4\}\ \{2; 3\}$$

$$A \times B = \{(1;2), (1;3), (2;2), (2;3), (4;2), (4;3)\}$$

observar que los elementos de R son todos los pares (a; b) $\varepsilon\, A \times B / a < b$. Luego, tenemos :

$$R = \{(1;2), (1;3), (2;3)\}$$

2.2. Relación en A :
Dado el conjunto no vacío A, se dice que R es una relación en A, si y solamente si, $R \subset A \times A$.

2.3. *Clases de Relación :*

Sea R una relación en A ($R \subset A \times B$), luego R podrá ser :

I. Reflexiva

$$\forall a \, \varepsilon A \rightarrow (a;a) \, \varepsilon R$$

II. Simétrica

$$(a;b) \, \varepsilon R \rightarrow (b;a) \, \varepsilon R$$

III. Transitiva

$$(a;b) \, \varepsilon R \wedge (b;c) \, \varepsilon R \rightarrow (a;c) \, \varepsilon R$$

IV. De equivalencia

Siempre y cuando sea a la vez reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo : Dado el conjunto

A = {1; 2; 3}

Se define una relación en A de la manera siguiente :

R = {(1; 1), (1; 2), (2; 2), (3; 3), (2; 1)}

¿R es una relación de equivalencia?

Resolución :

Si R es una relación de equivalencia, deberá ser reflexiva, simétrica y transitiva a la vez.

Reflexiva $\forall a \, \varepsilon R \rightarrow (a;a) \, \varepsilon R$

$1 \; \varepsilon \; A \rightarrow (1;1) \, \varepsilon R$ ¡Correcto!

$2 \; \varepsilon \; A \rightarrow (2;2) \, \varepsilon R$ ¡Correcto!

$3 \; \varepsilon \; A \rightarrow (3;3) \, \varepsilon R$ ¡Correcto!

Evidentemente, R es reflexiva.

Simétrica $(a;b) \, \varepsilon R \rightarrow (b;a) \, \varepsilon R$

$(1;2) \, \varepsilon R \rightarrow (2;1) \, \varepsilon R \rightarrow$ ¡Correcto!

Evidentemente, R es simétrica.

Transitiva $(a;b) \, \varepsilon R \wedge (b;c) \, \varepsilon R \rightarrow (a;c) \, \varepsilon R$

$(1;1) \, \varepsilon R \wedge (1;2) \, \varepsilon R \rightarrow (1;2) \, \varepsilon R$ ¡Correcto!

$(1;2) \, \varepsilon R \wedge (2;2) \, \varepsilon R \rightarrow (1;2) \, \varepsilon R$ ¡Correcto!

$(1;2) \, \varepsilon R \wedge (2;1) \, \varepsilon R \rightarrow (1;1) \, \varepsilon R$ ¡Correcto!

Evidentemente, R es transitiva.

$\therefore$ R es una relación de equivalencia.

FUNCIONES

1. *Definición :*

Dada una relación F de A en B $(F \subset A \times B)$, se dice que F es una función de A en B si y sólo si para cada $x \, \varepsilon A$ existe a lo más un elemento $y \, \varepsilon B$, tal que el par $(x;y) \, \varepsilon F$, es decir, que dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente.

Ejemplo :

¿Cuál o cuáles de las siguientes relaciones,

$R_1 = \{(2;1),(0;3),(-1;7)\}$

$R_2 = \{(3;0),(4;0),(5;1)\}$

$R_3 = \{(5;1),(4;-1),(4;2)\}$

son funciones?

Resolución :

De acuerdo con la definición, se observa que:

R_1 es función

R_2 es función

R_3 no es función, ¿por qué?

Porque $(4;-1) \, \varepsilon R_3 \wedge (4;2) \, \varepsilon R_3$, siendo pares ordenados distintos.

1.1. *Propiedad*

Siendo F una función, se verifica lo siguiente :

$$\boxed{(x;y) \, \varepsilon F \wedge (x;z) \, \varepsilon F \rightarrow y = z}$$

2. *Dominio y Rango de una función F*

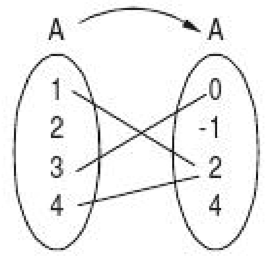
2.1. *Dominio de F = Dom(F)*

(D_F) denominado también pre imagen, es el conjunto de los primeros elementos de la correspondencia que pertenece al conjunto de partida.

2.2. *Rango de F = Ran(F)*

(R_F) denominado también imagen, recorrido o contra dominio, es el conjunto de segundos elementos de la correspondencia que pertenece al conjunto de llegada.

Ejemplo : Dada la relación funcional representada por el diagrama digital.



Determinar la función, indicando su dominio y rango.

Resolución :

Del diagrama, se tiene :

$$F = \{(1;2), (3;0), (4;2)\}$$

De donde es evidente que :

$$D_F = \{1;3;4\} \wedge R_F = \{2;0\}$$

2.3. Propiedad :
Sea F una función de A en B, luego se denota por: $F : A \to B$ y se cumple lo siguiente :

$$\boxed{D_F \subset A \wedge R_F \subset B}$$

3. Aplicación

3.1. Definición
Dada una función F de A en B, $F : A \to B$. Se dice que F es una aplicación, si y sólo si, su dominio es igual al conjunto de partida.

$$\boxed{F \text{ es aplicación} \longleftrightarrow D_F = A}$$

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

1. Definición :
Dada una función F de A en B, $F : A \to B$, si A y B son subconjuntos de los números reales R, se afirmará que F es una función real de variable real.

$$\boxed{F : A \to B, A \subset R \wedge B \subset R}$$

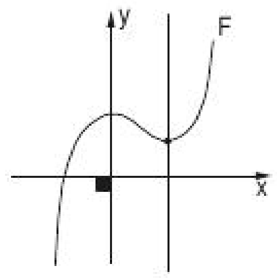
Debido a ello, F tendrá una representación gráfica en el plano cartesiano (x.y), la cual viene dada por un conjunto de puntos generados al establecer la relación de correspondencia entre la variable independiente "x" y su imagen la variable dependiente "y", es decir :

$$\boxed{F = \{(x;y) \varepsilon R^2 / x \varepsilon D_F \wedge y = F(x)\}}$$

la igualdad mostrada : y = F(x) expresa la regla de correspondencia de la función real F.

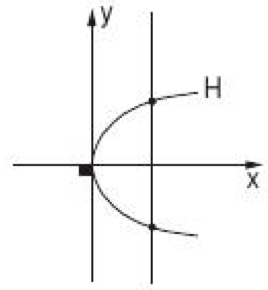
1.1. Teorema
Toda recta vertical, trazada a la gráfica de una función, la corta sólo en un punto.

Fig. (1)



F corresponde a la gráfica de una función.

Fig. (2)



H no corresponde a la gráfica de una función.

1.2. Criterios para determinar el dominio y el rango

I. Para el Dominio :
Se despeja la variable "y", para luego analizar la existencia de su equivalente.

II. Para el Rango :
Se despeja la variable "x", para luego analizar la existencia de su equivalente.

A veces, el rango se determina a partir del dominio.

Observación : Frecuentemente, para determinar dominios y rangos es necesario reconocer la existencia de las expresiones dadas dentro del conjunto de los números reales, así pues, tenemos :

Ejemplo :

Determinar el dominio y el rango de la función F, donde :

* $\frac{A}{B} \varepsilon R \leftrightarrow B \neq 0$
* $\sqrt{A} \varepsilon R \leftrightarrow A \geq 0$

Ejemplo :

Determinar el dominio y el rango de la función F, donde :

$$F : R \to R / y = F(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

Resolución :

De acuerdo con los criterios para el dominio :

$$y = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$y \, \varepsilon R \leftrightarrow x - 3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$x \, \varepsilon R - \{3\}$$

$$\therefore D_F = R - \{3\}$$

para el rango :

$$y = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$xy - 3y = 2x + 1$$

$$xy - 2x = 3y + 1$$

$$(y - 2)x = 3y + 1$$

$$x = \frac{3y+1}{y-2}$$

$$x \, \varepsilon R \leftrightarrow y - 2 \neq 0$$

$$y \neq 2$$

$$y \, \varepsilon R - \{2\}$$

$$\therefore R_F = R - \{2\}$$

Ejemplo :

Determinar el rango de la función, la cual viene dada por :

$$F = R \rightarrow R / y = F(x) = 2x - 3 ; x \, \varepsilon < 5;10]$$

Resolución :

Observar que el rango se puede encontrar a partir del dominio, pues con $x \, \varepsilon < 5;10]$ bastará determinar la extensión de : y = 2x - 3. Veamos :

Por condición : $x \, \varepsilon < 5;10]$

de donde tenemos : $5 < x \leq 10$

multiplicando por 2 $\quad 10 < 2x \leq 20$

sumando -3 $\quad 7 < 2x - 3 \leq 17$

$$7 < y \leq 17$$

$$y \, \varepsilon < 7;17]$$

observar que : $\therefore R_F = < 7;17]$

2. Igualdad de Funciones

2.1. Definición

Dadas las funciones F y G, tal que :

$$F : R \rightarrow R / y = F(x)$$

$$G : R \rightarrow R / y = G(x)$$

se dice que éstas son iguales : F = G, si y solo si verifican simultáneamente las condiciones :

I. $D_F = D_G$

II. $F(x) = G(x); \; \forall \, x \, \varepsilon D_F = D_G$

Ejemplo :

Dadas las funciones :

$$F : R \rightarrow R / y = F(x) = \frac{x}{x^2}$$

$$G : R \rightarrow R / y = G(x) = \frac{1}{x}$$

¿son iguales?

Resolución :

De acuerdo con la definición, veamos si se verifican las condiciones :

I. Para F : $y = \frac{x}{x^2}$

$$y \, \varepsilon R \leftrightarrow x^2 \neq 0$$

$$x \neq 0 \rightarrow x \, \varepsilon R - \{0\}$$

$$\therefore D_F = R - \{0\}$$

II. Para G : $y = \frac{1}{x}$

$$y \, \varepsilon R \leftrightarrow x \neq 0$$

$$x \neq 0 \rightarrow x \, \varepsilon R - \{0\}$$

$$\therefore D_G = R - \{0\}$$

Observar que : $D_F = D_G$.

II. Regla de correspondencia para F.

$$F : y = F(x) = \frac{x}{x^2}$$

como $x \neq 0$: $F(x) = \frac{1}{x}$

Regla de correspondencia para G.

$$G : y = G(x) = \frac{1}{x}$$

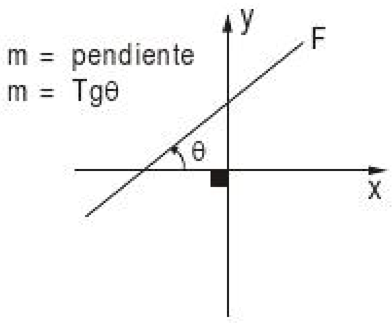
Observar que : F(x) = G(x).

$$\therefore F \wedge G \text{ son iguales}$$

1. FUNCIONES ESPECIALES

1.1. Función Lineal

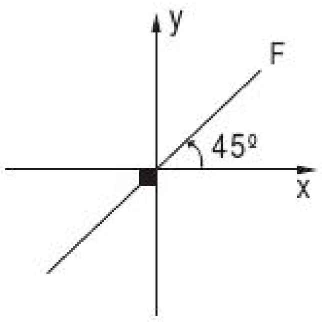
$$\boxed{F : y = F(x) = mx + b}$$



$$D_F = R \wedge F_F = R$$

1.2. Función Identidad

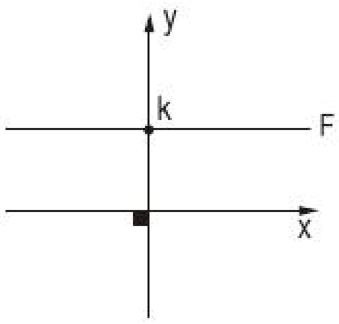
$$\boxed{F : y = F(x) = x}$$



$$D_F = R \wedge F_F = R$$

1.3. Función Constante

$$\boxed{F : y = F(x) = k;\ k \,\varepsilon\, R}$$

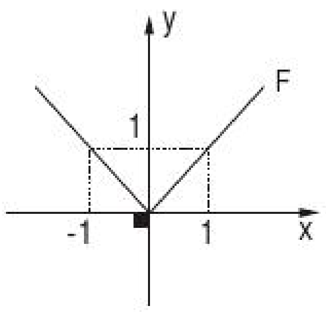


$$D_F = R \wedge R_F = \{k\}$$

1.4. Función Valor Absoluto

$$\boxed{F : y = F(x) = |x|}$$

$$y = |x| = \begin{cases} x\ ;\ x > 0 \\ 0\ ;\ x = 0 \\ -x\ ;\ x < 0 \end{cases}$$

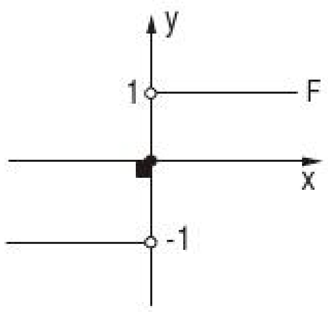


$$D_F = R \wedge R_F = [0\,;\infty >$$

1.5. Función Signo

$$\boxed{F : y = F(x) = Sgn(x)}$$

$$y = Sgn(x) = \begin{cases} -1\,;x < 0 \\ 0\,;x = 0 \\ 1\,;x > 0 \end{cases}$$

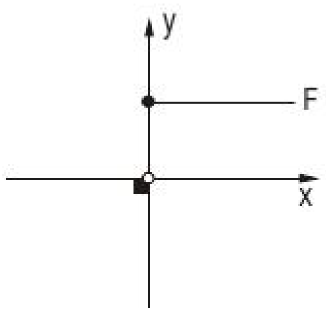


$$D_F = R \wedge R_F = \{-1, 0, 1\}$$

1.6. Función Escalón Unitario

$$\boxed{F : y = F(x) = u(x)}$$

$$y = u(x) = \begin{cases} 0\ ;\ x < 0 \\ 1\ ;\ x \geq 0 \end{cases}$$



$$D_F = R \wedge R_F = \{0\,;1\}$$

1.7. Función Máximo Entero

$$F : y = F(x) = [\![x]\!]$$

Definición : Dado el número real "x", el máximo entero de "x" es la relación funcional denotada por $[\![x]\!]$ y definida como el mayor entero menor o igual que "x", veamos algunos ejemplos :

* $[\![3;15]\!] = 3$ ¿por qué?

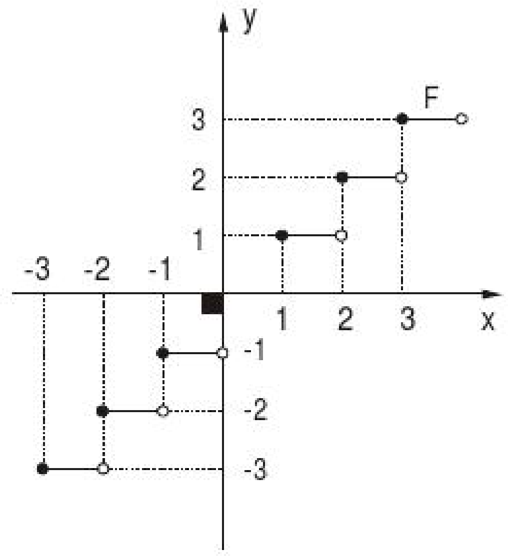
  Porque $3 \leq 3;15$

* $[\![4]\!] = 4$ ¿por qué?

  Por que $4 \leq 4$

Teorema :

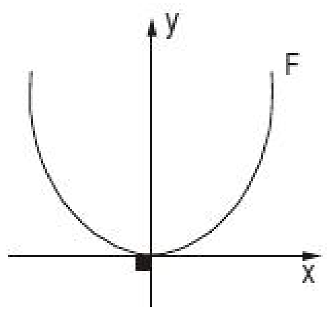
$$[\![x]\!] = y \leftrightarrow y \leq x < y + 1 ; y \varepsilon Z$$



$$D_F = R \wedge R_F = R$$

1.8. Función Cuadrática Simple :

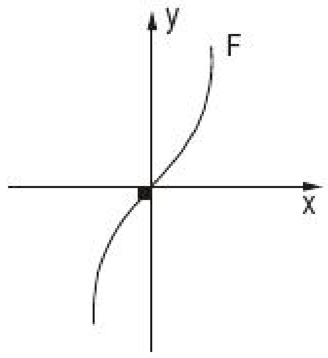
$$F : y = F(x) = x^2$$



$$D_F = R \wedge R_F = [0;\infty>$$

1.9. Función Cúbica Simple :

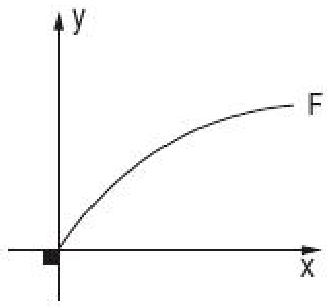
$$F : y = F(x) = x^3$$



$$D_F = R \wedge R_F = R$$

1.10. Función Raíz Cuadrada :

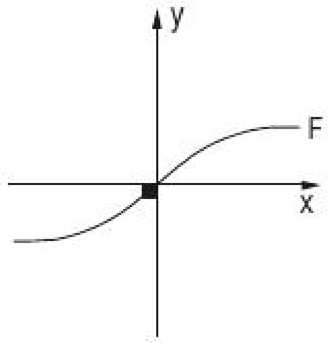
$$F : y = F(x) = \sqrt{x}$$



$$D_F = [0;\infty> \wedge R_F = [0;\infty>$$

1.11. Función Raíz Cúbica

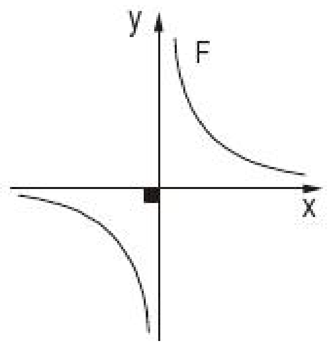
$$F : y = F(x) = \sqrt[3]{x}$$



$$D_F = R \wedge R_F = R$$

1.12. Función Inverso Multiplicativo

$$F : y = F(x) = \frac{1}{x}$$

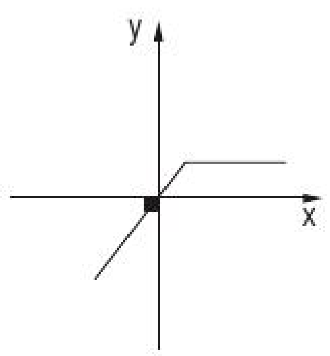


$$D_F = R - \{0\} \wedge R_F = R - \{0\}$$

2. DESPLAZAMIENTOS Y GIROS DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

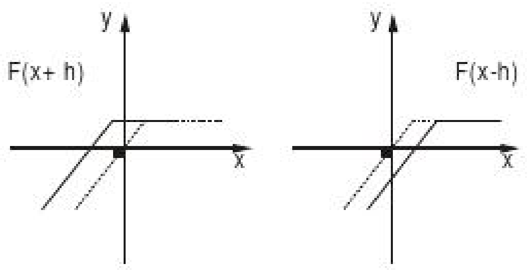
Conociendo la gráfica de la función F, donde:

$$F : y = F(x)$$



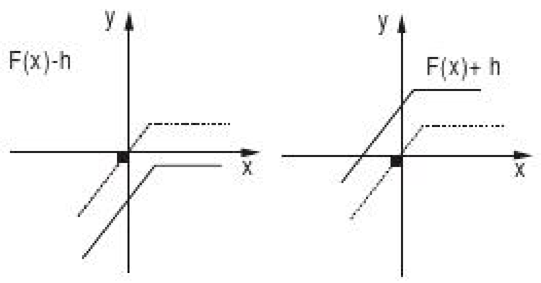
y considerando un número positivo "h", tenemos :

2.1. Desplazamiento Horizontal



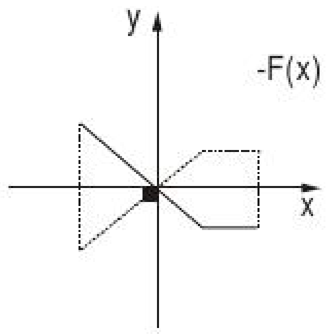
"h" unidades hacia la izquierda   "h" unidades hacia la derecha

2.2. Desplazamiento Vertical



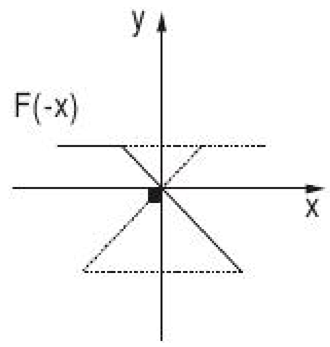
"h" unidades hacia abajo   "h" unidades hacia arriba

2.3. Giro con respecto al eje "x"



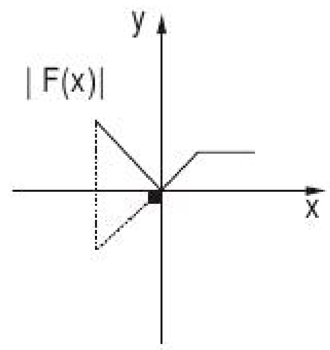
El eje "x" se comporta como si fuese un espejo.

2.4. Giro con respecto al eje "y"



El eje "y" se comporta como si fuese un espejo.

2.5. Giro producido por el valor absoluto



La parte de la gráfica debajo del eje "x", se refleja por encima del mismo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Determinar el valor de "m.n", si se cumple que :

$$(m+n;\ 3) = (9;\ 2m-n)$$

a) 10 b) 20 c) 30
d) 40 e) 50

02. Sean los conjuntos :

$A = \{x\,\varepsilon Z / -12 \leq 6x < 18\}$ y

$B = \{x\,\varepsilon Z / x^2 \leq 9\}$

Calcular el número de elementos que contiene el producto cartesiano $A \times B$.

a) 40 b) 35 c) 30
d) 25 e) 20

03. Sean los conjuntos :

$$A = \{1;\ 2;\ 3\} \wedge B = \{2;\ 4;\ 6\}$$

Determinar por extensión la relación R, de A en B, definida por :

$$R = \{(x;\ y)\ \varepsilon\ A \times B / y = 2x\}$$

a) $R = \{(1;\ 2),\ (2;\ 4)\}$
b) $R = \{(0;\ 1),\ (2;\ 4),\ (3;\ 5)\}$
c) $R = \{(1;\ 2),\ (2,\ 4),\ (3;\ 6)\}$
d) $R = \{(1;\ 2),\ (2;\ 4),\ (4;\ 8)\}$
e) $R = \{(2;\ 4),\ (1;\ 6)\}$

04. Sea el conjunto : $A = \{1;\ 2;\ 3\}$ y sean las relaciones R, S y T definidas en A; donde R, S y T son reflexiva, simétrica y transitiva, respectivamente; si :

$R = \{(1;\ a),\ (2;\ 3),\ (2;\ b),\ (3;\ c)\}$
$S = \{(1;\ 3),\ (e;\ d)\}$
$T = \{(1;\ 2),\ (2,\ 3),\ (f;\ g)\}$

Calcular el valor de : a+ b+ c+ d+ e+ f+ g.

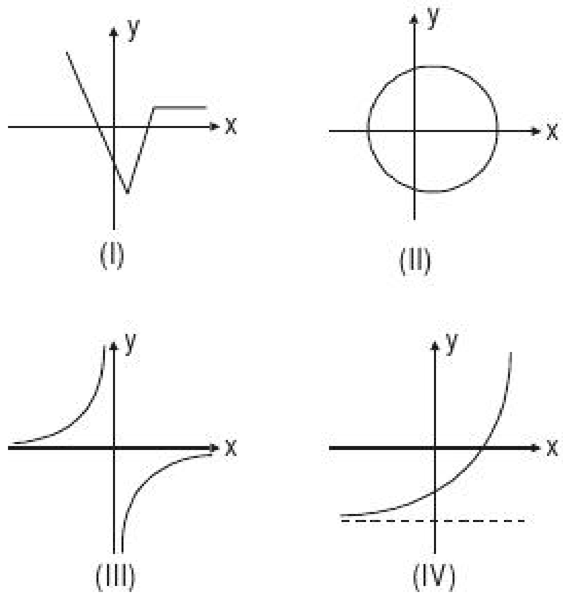
a) 12 b) 14 c) 16
d) 18 e) 20

05. ¿Cuál o cuáles de los siguientes conjuntos representa a una función?

I. $F = \{(2;\ 3),\ (2;\ 4),\ (3;\ 4)\}$
II. $G = \{(3;\ 1),\ (-1;\ 4),\ (4;\ 3)\}$
III. $H = \{(-2;\ 2),\ (-1;\ 3),\ (2;\ 3),\ (4;\ 2)\}$

a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III
d) I y III e) II y III

06. ¿Cuál o cuáles de las siguientes gráficas representa a una función?



a) Sólo I b) Sólo II y III c) Sólo I y IV
d) I, III y IV e) II y IV

07. Calcular el valor de "ab", si el conjunto :

$$F = \{(2;\ 5),\ (-1;\ 7);\ (2;\ a+2b);\ (3;\ a-9);\ (3;\ 2b)\}$$

representa una función.

a) -5 b) -6 c) -7
d) -8 e) -9

08. Del problema anterior, dar la suma de elementos del dominio y rango de la función.

a) 8 b) 10 c) 12
d) 14 e) 16

09. Dadas las funciones :

$F = \{(2;\ 6),\ (3:\ b),\ (3;\ a-b),\ (d;\ a)\}$
$G = \{(4;\ d+1),\ (4;\ 6),\ (\pi;\ b)\}$

Calcular : $F_{(2)} + F_{(d-2)} - F_{(d)} + G_{(\pi)}$

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

10. Determinar el dominio de la siguiente función :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x^2-4}$$

a) $[-5;+\infty> - \{-2;2\}$
b) $<-5;+\infty>$ c) $R - \{-2;2\}$
d) $[-5;+\infty>$ e) $<-2;2>$

11. Determinar el dominio de la siguiente función :

$$g(x)=\frac{4x+1}{2x+3}-\frac{3x+2}{5x-1}$$

a) $R-\{2;\frac{3}{5}\}$ b) $R-\{-\frac{3}{5};-2\}$

c) $R-\{-\frac{3}{2};\frac{1}{5}\}$ d) $R-\{4;1\}$

e) $R-\{-2\}$

12. Determinar el dominio de :

$$h(x)=\sqrt[4]{x+3}+\sqrt{7-x}-\frac{3}{x^2-1}$$

a) $[-3;7]-\{1\}$ b) $[-3;-1>\cup<1;7]$

c) $[-3;7]-\{-1;1\}$ d) $<-3;7>-\{-1;1\}$

e) $R-\{-1;1\}$

13. Determinar el rango de :

$$f(x)=\frac{4-3x}{x+5}$$

a) $R-\{3\}$ b) $R-\{-3\}$

c) $<-\infty;-5>\cup<-5;+\infty>$

d) $[\frac{4}{3};+\infty>$ e) $R-\{-5\}$

14. Indicar el rango de :

$$H=\left\{(x,y)/y=\frac{x}{x-3}\right\}$$

a) $R-\{-3\}$ b) R c) $R-\{1\}$
d) $R-\{0\}$ e) $R-\{3\}$

15. Hallar el rango de la función :

$$f(x)=x^2-3$$

a) $[3;+\infty>$ b) $[-3;0>$ c) $[-3;+\infty>$

d) $[0;+\infty>$ e) $<-\infty;+\infty>$

16. Determinar el rango de la función :

$$f(x)=x^2+31$$

a) $[31;+\infty>$ b) $<-\infty;31]$ c) R

d) R^- d) $R-\{31\}$

17. Determinar el rango de la función F, donde:

$$F:[5;8>\to[15;30>/y=F(x)=2x+5$$

a) $[10;13>$ b) $[15;21>$ c) $<10;13]$

d) $[15;30>$ e) $[35;65>$

18. Sea la función :

$F:R\to R/y=F(x)=\sqrt{2x+3}$; $x\,\varepsilon<3;11]$
Deteminar el rango de F(x).

a) $<3;5>$ b) $[3;5>$ c) $<3;5]$

d) R_0^+ e) $[3;5>\cup\{2\}$

19. Sea : $f(x)=\frac{\sqrt{6-x}}{x-4}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x-2}}$ con dominio en el conjunto Z. Hallar la suma de elementos del rango.

a) 14 b) $\frac{2\sqrt{3}+1}{2}$

c) $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{5\sqrt{3}+2}{2}$

e) 18

20. Determinar el rango de la función F, donde:

$F:R\to R/y=F(x)=x^2+4x+7$; $x\,\varepsilon<-5;4]$

a) [12; 39] b) [2; 11] c) [3; 39]
d) $<12;39]$ e) $<12;39>$

21. Sea la función :

$F:R\to R/y=F(x)=16-4x-x^2;x\,\varepsilon[-8;2>$
Determinar el rango de dicha función.

a) $[-20;16>$ b) $<-20;16]$

c) $[-16;+20]$ d) $<-16;20>$

e) $R-<-6;+\infty>$

22. Determinar el rango de la función :

$$g(x)=x^2+6x+4$$

a) $<-\infty;-5>$ b) $[-5;+\infty>$

c) $<-5;5>$ d) $[-5;+5]$

e) $<-\infty;-5]$

23. Sea la función :

$$F=\left\{(x,y)\,\varepsilon R^2/y=\frac{3}{x^2+9}\right\}$$

se sabe que su rango es : $<a;b]$.
Hallar : 9b + a.

a) 2 b) 1 c) 3
d) 0 e) 4

24. Dada la función :

$$F(x)=2x^2+3x+2\ ;\ x\,\varepsilon\,R$$

donde : $Ran(F)=[\frac{a}{a+1};\infty>$

Calcular "a".

a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

25. Determinar el rango de la función real de variable real, cuya regla de correspondencia es :

$$y=F(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

a) $[-1;1]$ b) $<-1;1>$ c) $[-1;\infty>$
d) $[0;1]$ e) $<-\infty;0]$

26. Determinar el menor valor que asume la función real de variable real cuya regla de correspondencia es :

$$y=F(x)=\frac{x^2+1}{2x^2+x+2}$$

a) 2/5 b) 2/3 c) 5/2
d) 5/3 e) 1

27. Sea la función : $f:R\to R\ /\ f(x)=A$

$A\,\varepsilon\,Q^-$, llamada función constante.

Se sabe que : $f^2(2005)+f(1003)=12$.

Hallar : $E=\sum_{k=1}^{10} f(k)$.

a) – 40 b) – 20 c) 30
d) 20 e) 40

28. Si : $<a;b]$ es el dominio de la función F, definida por:

$$F=\left\{(\frac{2x+1}{2x+3};x)\varepsilon R^2\ /\ x\,\varepsilon<0;10]\right\}$$

entonces, la relación correcta entre los valores de "a" y "b", es :

a) a + 3b = 25 b) 3a + 6b = 10
c) 6a + 23b = 25 d) 6a + 46b = 44
e) 5a + 6b = 36

29. Si tenemos :

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & ;x\,\varepsilon[0;2>\\ 2x+1 & ;x\,\varepsilon[2;5>\end{cases}$$

si : $x\,\varepsilon[1;\frac{3}{2}>$.

Hallar : $f(2x-1)-f(2x^2)$.

a) 14 b) 2x - 1 c) -4x
d) x^2 e) 2x

30. Dada la función :

$f(t)=\frac{|3+t|-|t|-3}{t}$; redefina la función en los intervalos de :

$<-\infty;-3>,[-3;0>$ y $[0;+\infty>$

Luego, calcular : $5f_{(-5)}+f_{(-1)}-f_{(4)}$

a) 8 b) 6 c) 4
d) 2 e) -10

31. Para la función :

$f(x)=x^2-2x+3+|x-10|+|x|\ ;\ 2\le x\le 10$.

"A" es el menor valor real y "B" es el mayor valor real.

Tal que : $B\le f(x)\le A$.

$\forall x\,\varepsilon[2;10]$. Hallar : A + B.

a) 80 b) 96 c) 103
d) 106 e) 115

32. Hallar el rango de :

$$G=\{(x,y)\varepsilon R^2\ /\ y=\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}\}$$

a) $y\,\varepsilon[\sqrt{2};4]$ b) $y\,\varepsilon[0;4]$

c) $y\,\varepsilon R$ d) $y\,\varepsilon[2\sqrt{2};4]$

e) $y\,\varepsilon[0;2\sqrt{2}]$

33. Determinar el dominio de la función F, donde :

$$F:R\to R\ /\ y=F(x)=\sqrt{3+\sqrt{2-\sqrt{x}}}$$

a) $<0;\infty>$ b) $[0;\infty>$ c) $[0;4]$

d) $[0;4>$ e) $[-4;4]$

34. Hallar el dominio de :

$f(x)=\sqrt{|x-3|+x-\sqrt{-x}}$, e indicar el número de valores enteros que posee.

a) Infinitos b) 8 c) 9
d) 10 e) 11

35. Sea la función polinomial : $f(x):R\to R$

$f(x)=x^6-3x^4+3x^2-12$; encontrar su dominio, si su rango es $[-12;16>$.

a) $[1;\infty>$ b) $<-16;12>$

c) $<-2;2>$ d) $<-1;4>$

e) $<-4;1]$

36. Dada la función :

$$F(x)=\sqrt[n]{a^n-x^n}\,;n\,\varepsilon N\ \wedge\ a>0$$

I. Dom(F) = R; $\forall$ n impar
II. Dom(F) = [-a; a] $\forall$n par
III. F(x) = F(-x); $\forall$ n par

Indicar el valor de verdad.

a) VVV b) VVF c) VFV
d) FFV e) FFF

37. ¿Qué conjuntos de pares ordenados son funciones?

$A=\{(t^2+3;t)/t\,\varepsilon R\}$

$B=\{(t+5;t)/t\,\varepsilon R\}$

$C=\{(t^2-1;t)/t\,\varepsilon R\}$

$D=\{(3t+2;t)/t\,\varepsilon R\}$

a) Sólo B. b) A y B. c) Sólo B.
d) Todos. e) B y D.

38. Calcular el rango de la función :

$$f(x)=-\sqrt{2x-\sqrt{x}}$$

Si : $D_F=x\,\varepsilon[1;9]$.

a) $<1;\sqrt{15}>$ b) $<-1;\sqrt{15}>$

c) $<\sqrt{15};1]$ d) $[-\sqrt{15};-1]$

e) $<0;\sqrt{15}]$

39. Determinar el rango de la función :

$$F(x)=(|x-5|+1+x)\sqrt{5-x}$$

a) $[0;\infty>$ b) $<-1;\infty>$ c) $<-\infty;0]$

d) R e) $<-\infty;4]$

40. Sea la función lineal : $f:R\rightarrow R$ cuya regla de correspondencia es :

$$f(x)=|ax^2-3ax+a-2|+ax^2-ax+3$$

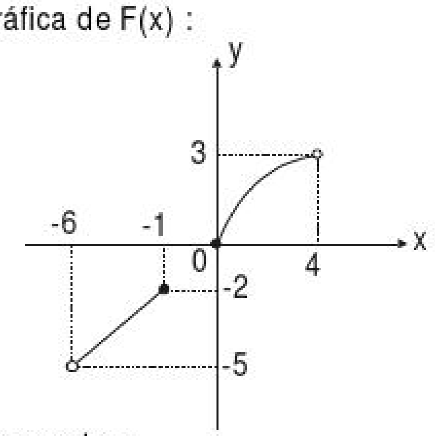
indicar los valores del parámetro real "a", que definen completamente la función "f".

a) $a\,\varepsilon<0;8/5>$ b) $a\,\varepsilon<1;5/3>$

c) $a\,\varepsilon<-\frac{8}{5};1>$ d) $a\,\varepsilon R$

e) $a\,\varepsilon<-\frac{8}{5};0>$

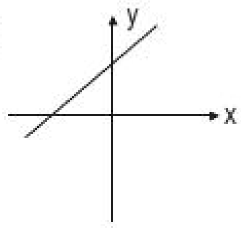
41. Dada la gráfica de F(x) :

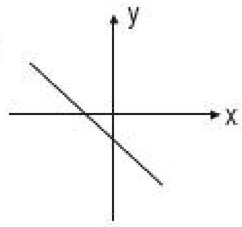


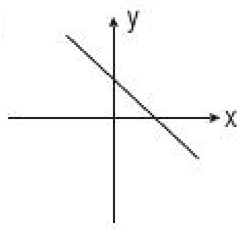
Indicar lo correcto :

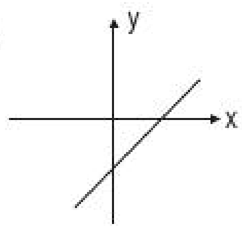
a) $Dom(F)=<-5;-2]\cup<0;3]$
b) $Ran(F)=[-5;-2>\cup<0;3]$
c) $Ran(F)=<-6;-1>\cup<0;4]$
d) $Dom(F)=<-6;-1]\cup[0;4>$
e) $Ran(F)=<-2;0>$

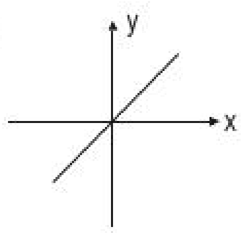
42. Graficar : F(x) = 3x - 2

a)


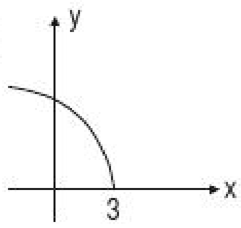
b)


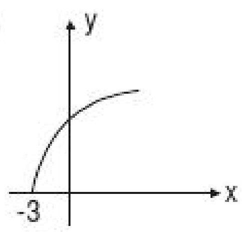
c)


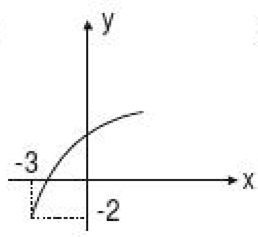
d)


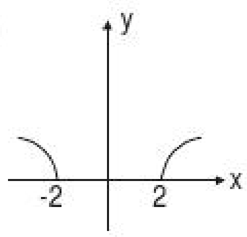
e)


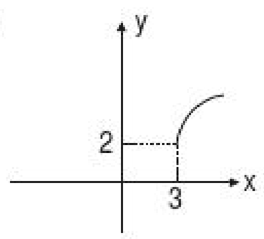
43. Graficar la función : $F(x)=\sqrt{x-3}+2$

a)


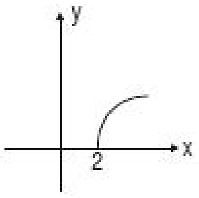
b)


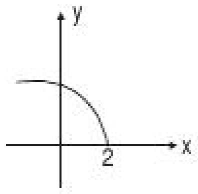
c)


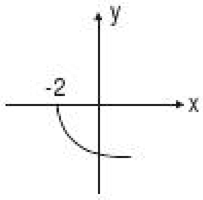
d)


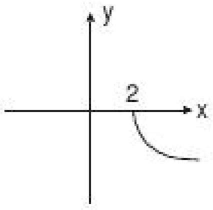
e)


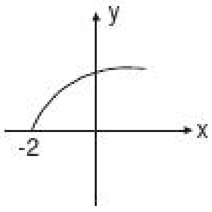
44. Graficar : $F(x) = -\sqrt{x-2}$

a)


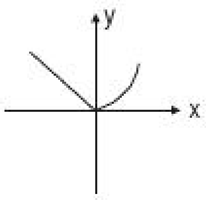
b)


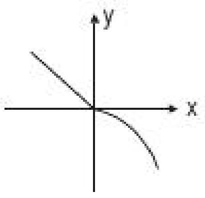
c)


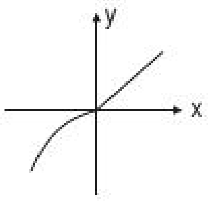
d)


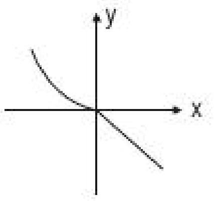
e)


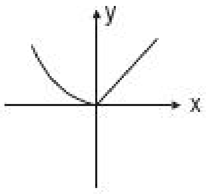
45. Graficar : $F(x) = \begin{cases} x^2 ; \text{si} : x < 0 \\ x \;\; ; \text{si} : x \geq 0 \end{cases}$

a)


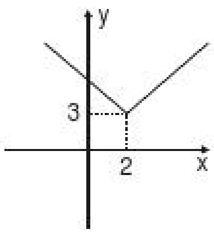
b)


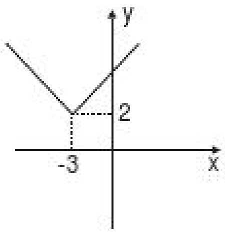
c)


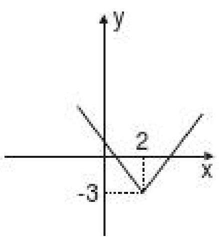
d)


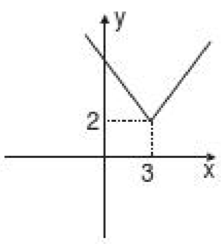
e)


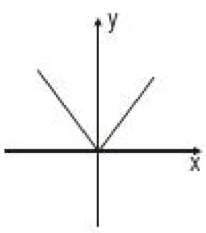
46. Graficar : $F(x) = |x - 3| + 2$.

a)


b)


c)


d)


e)


47. Luego de graficar : $F(x) = -x^2 + 6x - 14$, se obtiene una parábola cuyo vértice está dado por el par ordenado (a; b). Calcular : a + b.

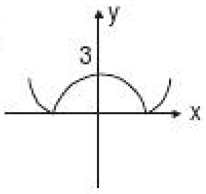
a) 8 b) 2 c) -2
d) -8 e) 5

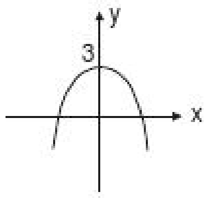
48. Hallar el área de la región formada por las gráficas de las funciones F y G, tales que :

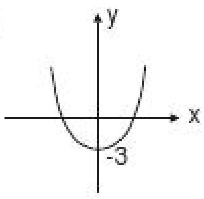
$$F(x) = |x-5| \quad y \quad G(x) = 3.$$

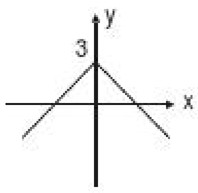
a) 6 u^2 b) 8 c) 9
d) 12 e) 16

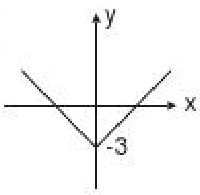
49. Graficar : $F(x) = |x^2 - 3|$

a)


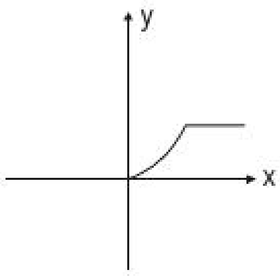
b)


c)


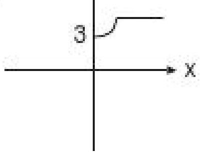
d)


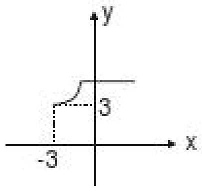
e)


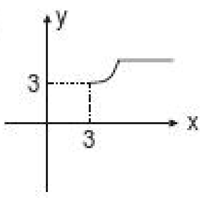
50. Se tiene la gráfica de la función F(x) :

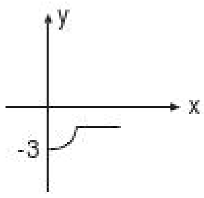


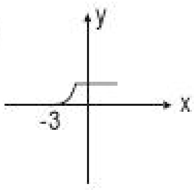
¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a :
$H(x) = F(x-3) + 3$?

a)


b)


c)


d)


e)


51. Obtener la pendiente de :

$$F(x) = Ax + B + 2$$

sabiendo que la gráfica F(x) pasa por el punto (8; 38) y por el punto (0; -2).

a) -2 b) 4 c) 3
d) 5 e) 1

52. Hallar el área de la región formada por las gráficas de las funciones :

$f(x) = abx - b^2$; $ab > 0$

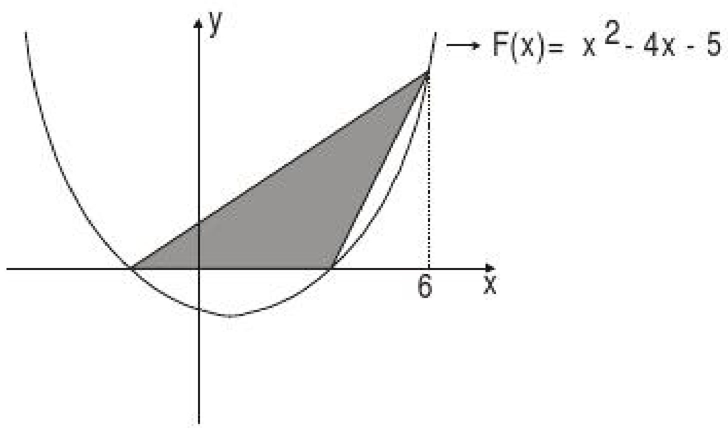
$g(x) = 2b^2$

con el eje de las ordenadas.

a) $\dfrac{9b^3}{a}u^2$ b) $\dfrac{2a}{9b^3}$ c) $\dfrac{2b^3}{9a}$

d) ab e) $\dfrac{9b^3}{2a}$

53. Hallar el área de la región sombreada :



a) 21 u^2 b) 42 c) 28
d) 14 e) 24

54. En la función : $f(x) = (x - a)^2 + b$.
El valor de "x" que hace que la función acepte a 7 como mínimo valor, es 7.
Hallar "ab".

a) 7 b) 14 c) 49
d) – 49 e) 0

55. La función cuadrática :

$$f(x) = -2x^2 + 12x + 1$$

tiene un máximo o un mínimo.
¿Cuál es su valor?

a) Un mínimo, 19. b) Un máximo, 19.
c) Un máximo, 3. d) Un mínimo, 3.
e) Un máximo, 20.

56. La ganancia de cierta compañía está dada por :

$$G(x) = -2x^2 + 60x + 1500$$

Encontrar la ganancia máxima.

a) 1945 b) 1950 c) 1955
d) 1960 e) 1965

57. Hallar los puntos de intersección de las gráficas de :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \;\text{ y }\; g(x) = 5x - 9$$

e indicar la suma de coordenadas de uno de ellos.

a) 7 b) 8 c) 15
d) 16 e) 20

58. Dadas las funciones :

$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

$g(x) = -7x^2 - 3px + p$

se elige "p", de manera que sus gráficas tengan un único punto en común. Entonces, las coordenadas (x; y) de dicho punto son :

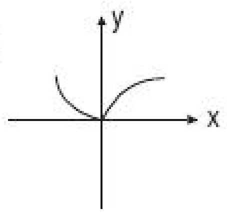
a) (0 ; 0) b) (1 ; 1) c) (–1 ; 3)
d) (1 ; 3) e) (1 ;–3)

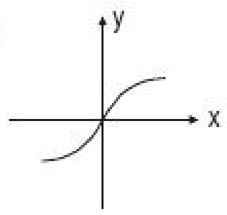
59. Determinar el área de la región formada por la función: F(x) = -| x| + 4 y el eje de las abscisas.

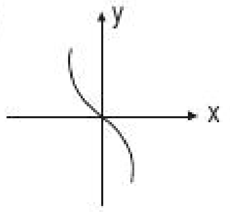
a) 8 u^2 b) 12 c) 14
d) 16 e) 32

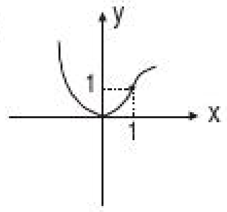
60. Graficar :

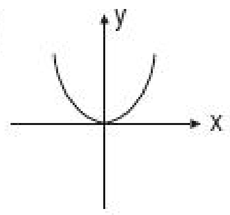
$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \;; x \geq 1 \\ x^2 \;; x < 1 \end{cases}$$

a)


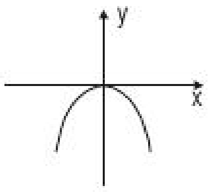
b)


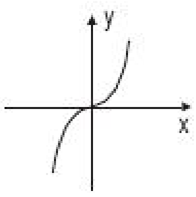
c)


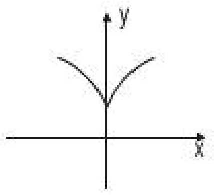
d)


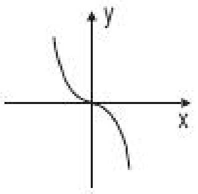
e)


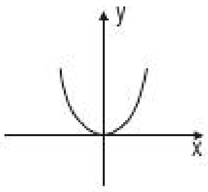
61. La gráfica de la función :
$F(x) = x|x|$; es :

a) 

b) 

c) 

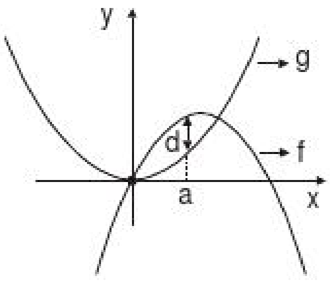
d) 

e) 

62. Las gráficas corresponden a las funciones:

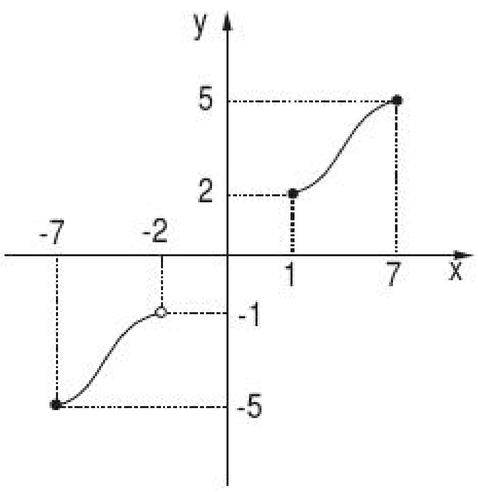
$$f(x) = -x^2 + 2x \quad \wedge g(x) = \frac{1}{2}x^2$$

si la máxima longitud vertical "d" se encuentra en la abscisa "a". Calcular "a".



a) 1 b) 3/2 c) 2/3
d) 1/3 e) 3/4

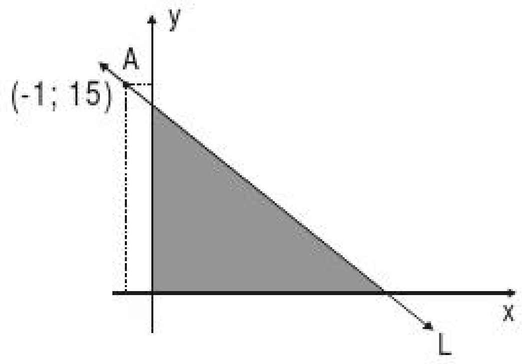
63. Dada la gráfica de F(x) :



se cumple :
$\text{Dom}(F) \cap \text{Ran}(F) = [a;b> \cup [c;d]$
Calcular : a + b + c + d.

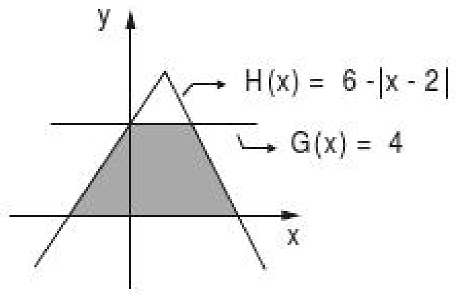
a) 0 b) 1 c) – 3
d) 13 e) – 13

64. Hallar el área del triángulo sombreado, si "L" es una recta cuya pendiente (– 3).



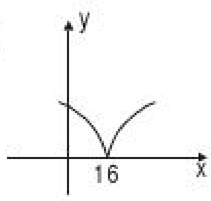
a) 15 u^2 b) 21 c) 24
d) 28 e) 32

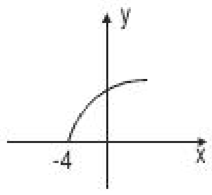
65. Calcular el área de la región sombreada limitada por las funciones indicadas.

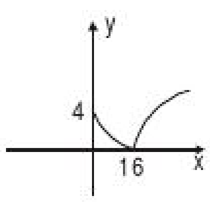


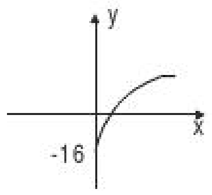
a) 24 b) 32 c) 48
d) 16 e) 20

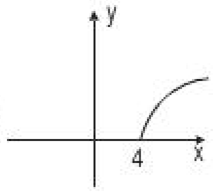
66. Graficar : $F(x) = |\sqrt{x} - 4|$

a) 

b) 

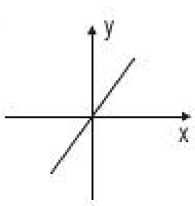
c) 

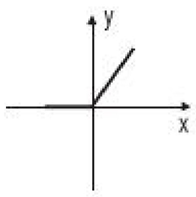
d) 

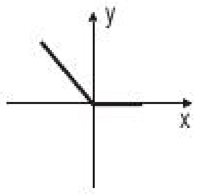
e) 

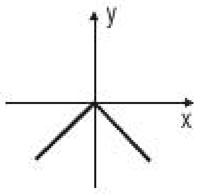
67. Indicar la gráfica de la función :

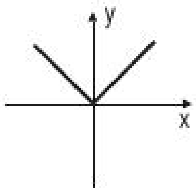
$$F(x) = x + \sqrt{x^2}$$

a) 

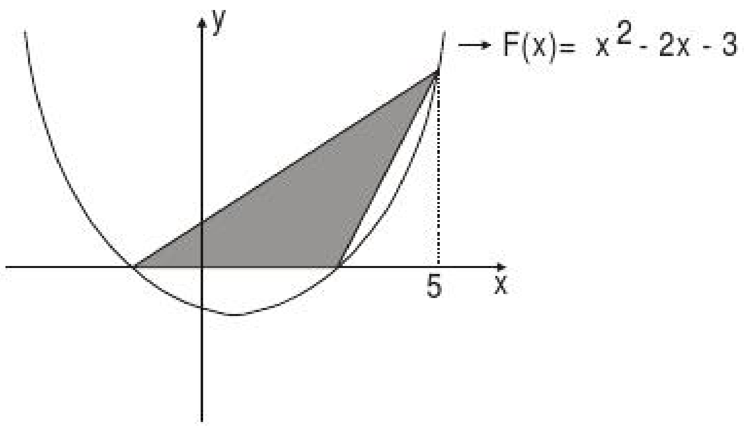
b) 

c) 

d) 

e) 

68. Hallar el área de la región sombreada :



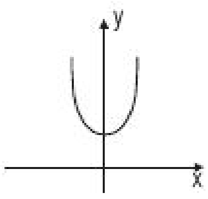
a) 36 u^2 b) 18 c) 24
d) 12 e) 25

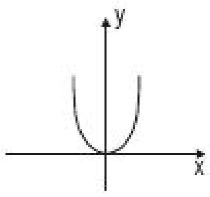
69. ¿Cuál de los siguientes puntos no está en la gráfica?

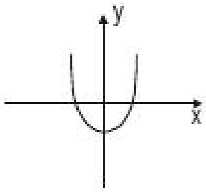
$$y=\frac{x}{x+1}$$

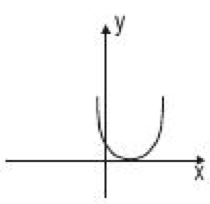
a) (0; 0) b) $(-\frac{1}{2};-1)$ c) $(\frac{1}{2};\frac{1}{3})$
d) (–1; 1) e) (–2; 2)

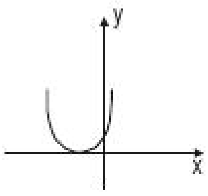
70. Graficar : $F(x)=x^2+2mx+m^2$.
Si : m < 0.

a) 

b) 

c) 

d) 

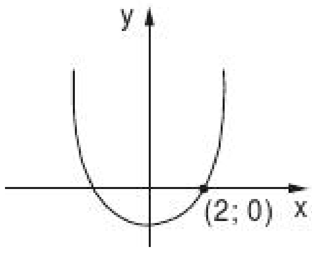
e) 

71. Si "h" es una función lineal de pendiente 3 e intersección con el eje "y" igual a 5, hallar la regla de correspondencia de la función g(x), si:

$$g(x) - x = h(1) + h(x+1)$$

a) g(x) = 4x + 4 b) g(x) = 4x + 16
c) g(x) = 4x + 12 d) g(x) = 3x + 13
e) g(x) = 3x + 12

72. En el siguiente gráfico :



Hallar la ecuación de la parábola si el punto (3, 2) pertenece a ella y su rango es el intervalo $[-\frac{1}{4};+\infty>$.

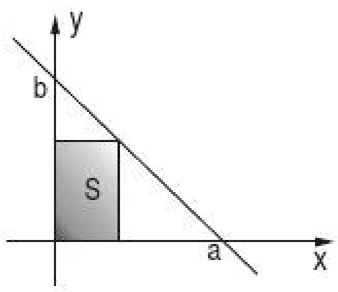
a) $x^2-3x+2=y$ b) $y=x^2+3x+2$
c) $y=x^2-3x-2$ d) $2x^2+3x+2=y$
e) $2x^2-3x-2=y$

73. Indicar cuántos puntos de la forma (a; b) donde : a y b ε Z se encuentran dentro de la zona limitada por las funciones :

$$F(x) = (x+2)(x-2) \;\; y \;\; G(x) = (2+x)(2-x)$$

a) 21 b) 19 c) 14
d) 12 e) 17

74. De la gráfica :



Si el área "S" del rectángulo es máxima, hallar dicha área.

a) ab b) $\frac{ab}{2}$ c) $\frac{ab}{4}$

d) $\frac{ab}{3}$ e) $\frac{ab}{6}$

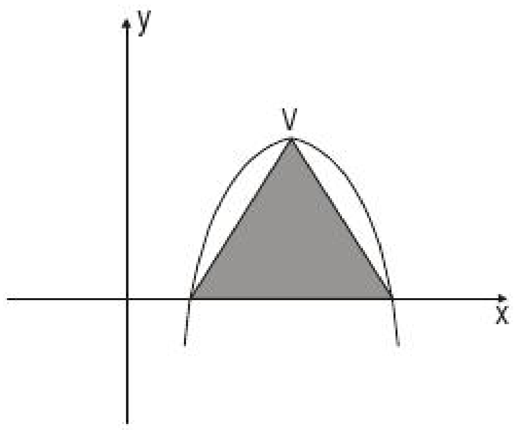
75. Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre los ejes coordenados y el cuarto vértice sobre la recta de ecuación y = – 2x + 8. El área máxima que puede tener el rectángulo es igual a :

a) 8 b) 9 c) 10
d) 11 e) 12

76. Sea f, una función de proporcionalidad, tal que : $f(3) + f(7) = 20$. Entonces, el valor del producto : $f(21/5)\ f(5)\ f(7)$, es :

a) 147 b) 1470 c) 1170
d) 1716 e) 1176

77. Dado el gráfico :



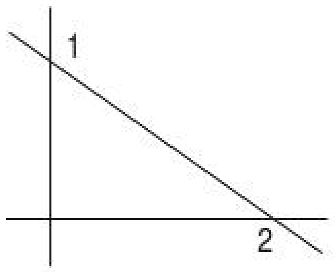
Donde :

$$F(x) = -x^2 + 6x - 8$$

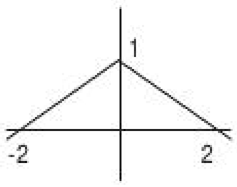
Hallar el área de la región sombreada.
(V : vértice de la parábola).

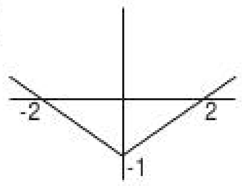
a) 1 u^2 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

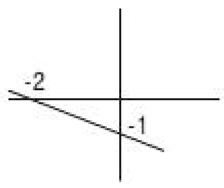
78. Si la gráfica adjunta, representa a :
$y = f(x)$

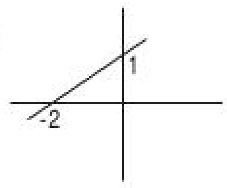


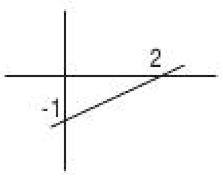
¿Cuál de las gráficas representa a :
$y = f(-x)$?

a)


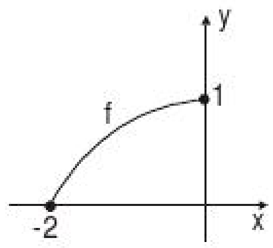
b)


c)


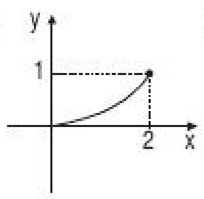
d)


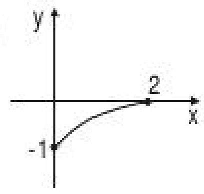
e)


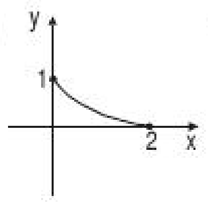
79. Según el gráfico de "f".

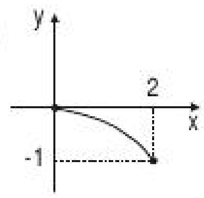


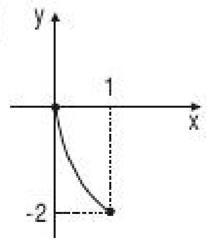
Indicar el gráfico : $H(x) = f(-x) - 1$.

a)


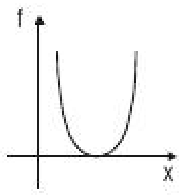
b)


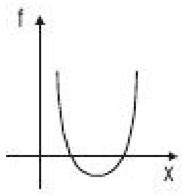
c)


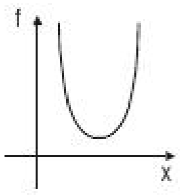
d)


e)


80. Dada la función "f" cuya regla de correspondencia es $f(x) = x^2 - 2x + a$. Entonces, podemos afirmar que los gráficos adjuntos corresponden :

I.


II.


III.


a) El gráfico II ocurre cuando $a > 1$.
b) El gráfico II ocurre cuando $a < 1$.
c) El gráfico III ocurre cuando $a = 1$.
d) El gráfico I ocurre cuando $a < 1$.
e) El gráfico II ocurre cuando $a > 1$.

Claves

01.	b	21.	c	41.	d	61.	b
02.	c	22.	b	42.	d	62.	c
03.	c	23.	c	43.	e	63.	a
04.	b	24.	b	44.	d	64.	c
05.	e	25.	a	45.	e	65.	b
06.	d	26.	a	46.	d	66.	c
07.	c	27.	a	47.	c	67.	b
08.	d	28.	d	48.	c	68.	b
09.	c	29.	c	49.	a	69.	d
10.	a	30.	a	50.	c	70.	d
11.	c	31.	d	51.	d	71.	b
12.	c	32.	d	52.	e	72.	a
13.	b	33.	c	53.	a	73.	e
14.	c	34.	d	54.	c	74.	c
15.	c	35.	c	55.	b	75.	a
16.	a	36.	a	56.	b	76.	e
17.	b	37.	e	57.	c	77.	a
18.	c	38.	d	58.	d	78.	d
19.	c	39.	a	59.	d	79.	d
20.	c	40	e	60	d	80.	b

Capítulo 16

LOGARITMOS EN R

Función Exponencial

Siendo "b" un número positivo distinto de la unidad.

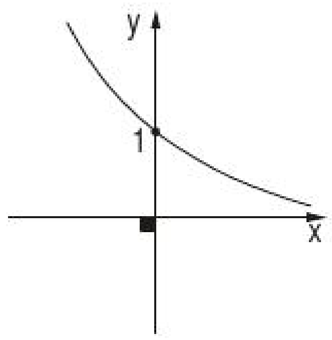
$$\boxed{F : R \rightarrow R \,/\, y = F(x) = \exp_b(x) = b^x}$$

Donde :

$$D_F = R \wedge R_F = <0\,;\,\infty>$$

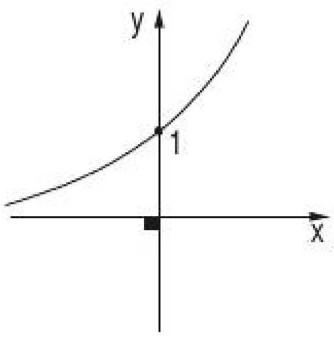
Análisis de la gráfica :

1. $F : F(x) = b^x\ ;\ 0 < b < 1$



La función es decreciente.

2. $F : y = F(x) = b^x\ ;\ b > 1$



La función es creciente.

Observación : La función exponencial es monótona e inyectiva, por lo último se afirma que dicha función admite inversa.

Función logarítmica

Siendo "b" un número positivo distinto de la unidad.

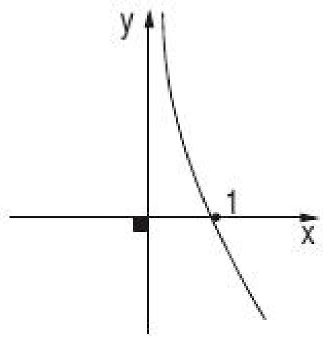
$$\boxed{F : R \rightarrow R \,/\, y = F(x) = \text{Log}_b x}$$

Donde :

$$D_F = <0\,;\,\infty> \wedge R_F = R$$

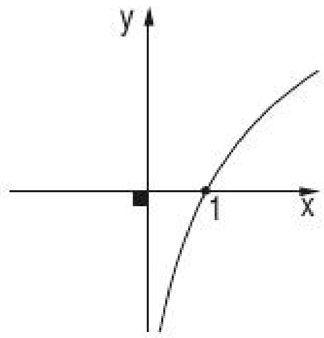
Análisis de la gráfica

1. $F : y = F(x) = \text{Log}_b x\ ;\ 0 < b < 1$



La función es decreciente.

2. $F : y = F(x) = \text{Log}_b x\ ;\ b > 1$



La función es creciente.

Observación : La función logarítmica es la inversa de la función exponencial y viceversa.

Logaritmo (Log)

Se define logaritmo de un número "N" en una base "b" positiva y distinta de la unidad, como el exponente "α" que debe afectar a dicha base, para obtener una potencia igual al número dado inicialmente.

Representación

$$Log_bN = \alpha \ .... (1)$$

Donde :
Log = Operador de la logaritmación
N = Número propuesto / N > 0
b = Base del logaritmo / b > 0; b $\neq 1$
α = Logaritmo / $\alpha \in R$.

Definición :

$$b^{\alpha} = N \ ...... \ (2)$$

* $Log_2 8 = x \iff 2^x = 8$
$\therefore x = 3$

* $Log_5 x = 2 \iff 5^2 = x$
$\therefore x = 25$

Teorema : Reemplazando (1) en (2).

$$\boxed{b^{Log_b N} = N}$$

* $5^{Log_5 3} = 3$

* $12^{Log_{12}(x-4)} = 5 \iff x-4 = 5$
$\therefore x = 9$

Propiedades generales :

1. $\forall b > 0 ; b \neq 1$

$Log_b 1 = 0$

2. $\forall b > 0 ; b \neq 1$

$Log_b b = 1$

Observación : En R no existe el logaritmo para números negativos.

* $Log_7(-10)$ ¡No existe en R!

Propiedades operativas :

1. $\forall M, N > 0 ; \forall b > 0 ; b \neq 1$

$$\boxed{Log_b M + Log_b N = Log_b(M.N)}$$

2. $\forall M, N > 0 ; \forall b > 0 ; b \neq 1$

$$\boxed{Log_b M - Log_b N = Log_b\left(\frac{M}{N}\right)}$$

3. $\forall M > 0 ; \forall n \in R ; \forall b > 0 ; b \neq 1$

$$\boxed{Log_b M^n = n . Log_b M}$$

4. $\forall M > 0 ; \forall n \in R - \{0\} ; \forall b > 0 ; b \neq 1$

$$\boxed{Log_b M = Log_{b^n} M^n}$$

Casos especiales :

1. $\forall b > 0 ; b \neq 1 ; \{m, n\} \subset R - \{0\}$

$$Log_{(b^n)}(b^m) = \frac{m}{n}$$

2. $\forall b > 0 ; b \neq 1 ; \{m, n\} \subset R^+$

$$Log_{(\sqrt[n]{b})}(\sqrt[m]{b}) = \frac{n}{m}$$

3. $\forall b > 0 ; b \neq 1 ; n \in R$

$$n = Log_b b^n$$

Sistema de logaritmos

Un sistema de logaritmos se genera al asumir el parámetro "b" un valor determinado, como : b > 0; b $\neq$ 1, es fácil apreciar que existen infinitos sistemas de logaritmos, siendo los usuales los siguientes :

1. Sistema de logaritmos naturales :
También llamado sistema de logaritmos neperianos o hiperbólicos. Aquí, la base es el número inconmensurable "e" cuyo valor aproximado es : 2,7182.

$$\boxed{Log_e N = LnN \ ; \ N > 0}$$

2. Sistema de logaritmos decimales :
También llamado sistema de logaritmos vulgares o Briggs, aquí la base es el número 10.

$$\boxed{Log_{10} N = LogN \ ; \ N > 0}$$

Conversión de Sistemas :

1. De logaritmo natural a decimal

$$\boxed{\text{LogN} = 0{,}4343\ .\text{LnN}\ ;\ N > 0}$$

2. De logaritmo decimal a natural

$$\boxed{\text{Ln N} = 2{,}3026\ .\ \text{LogN}\ ;\ N > 0}$$

Cambio de base

Dado un logaritmo en base "b", se le podrá representar en base "m", según la relación.

$$\boxed{\text{Log}_b N = \frac{\text{Log}_m N}{\text{Log}_m b}}$$

Donde : $N > 0 \wedge \{m, b\} \subset R^+ - \{1\}$

* $\text{Log}_3 12$ en base 5, será :

$$\text{Log}_3 12 = \frac{\text{Log}_5 12}{\text{Log}_5 3}$$

Caso especial : $\forall\{a, b\} \subset R^+ - \{1\}$

$$\boxed{\text{Log}_b a = \frac{1}{\text{Log}_a b}}$$

* $\text{Log}_7 18 = \dfrac{1}{\text{Log}_{18} 7}$

Regla de la cadena :

Verificando la existencia de cada uno de los factores en el conjunto R, se cumple :

$$\boxed{\text{Log}_b \cancel{a . \text{Log}_a} \cancel{c . \text{Log}_c} \cancel{d . \text{Log}_d} e = \text{Log}_b e}$$

* $\text{Log}_2 5 . \text{Log}_5 7 . \text{Log}_7 8 = \text{Log}_2 8$

$= \text{Log}_2 2^3 = 3\text{Log}_2 2$

$= 3 . 1 = 3$

Propiedad adicional :

$$\forall\ a, b, c\ \varepsilon R^+ / b \neq 1$$

$$\boxed{a^{\text{Log}_b c} = c^{\text{Log}_b a}}$$

* $5^{\text{Log}_7 12} = 12^{\text{Log}_7 5}$

Ecuaciones logarítimicas

Analizaremos cada uno de los casos frecuentes, veamos :

Primer caso : $\text{Log}_b x = a$

se cumple : $x > 0 \wedge b > 0 ; b \neq 1$

se plantea : $b^a = x$

Segundo caso : $\text{Log}_b x = \text{Log}_b y$

se cumple : $x > 0 \wedge y > 0 \wedge b > 0 ; b \neq 1$

se plantea : $x = y$

Tercer daso : $b^x = a$

se cumple : $a > 0 \wedge b > 0$

se plantea : $\text{Log}_b b^x = \text{Log}_b a$

$x . \text{Log}_b b = \text{Log}_b a$

$\therefore\ x = \text{Log}_b a$

Inecuaciones exponentes

Analizaremos cada uno de los casos existentes, veamos :

Primer caso : Siendo, $0 < b < 1$.

$b^x < b^y \Rightarrow x > y$

$b^x > b^y \Rightarrow x < y$

Segundo caso : Siendo, $b > 1$.

$b^x < b^y \Rightarrow x < y$

$b^x > b^y \Rightarrow x > y$

Inecuaciones logarítmicas

Analizaremos cada uno de los casos existentes, veamos :

Primer caso :
Siendo, $0 < b < 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0$

$\text{Log}_b x < \text{Log}_b y \Rightarrow x > y$

$\text{Log}_b x > \text{Log}_b y \Rightarrow x < y$

Segundo caso :

Siendo, $b > 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0$

$Log_b x < Log_b y \Rightarrow x < y$

$Log_b x > Log_b y \Rightarrow x > y$

Cologaritmo (Colog)

Teniendo en cuenta que :

$$N > 0 \wedge b > 0 \, , b \neq 1$$

Se define el cologaritmo del número "N" en la base "b", de la manera siguiente :

$$\boxed{Co\log_b N = -Log_b N = Log_b\left(\frac{1}{N}\right)}$$

* $$Co\log_{125} 25 = -Log_{125} 25$$
$$= -Log_{(5^3)}(5^2)$$
$$= -\frac{2}{3}$$

Antilogaritmo (Antilog)

También llamado exponencial, considerando que : $N \, \varepsilon R \wedge b > 0 \; b \neq 1$, se define el logaritmo del número "N" en la base "b", de la manera siguiente:

$$\boxed{Antilog_b N = exp_b N = b^N}$$

* $Antilog_2 4 = 2^4 = 16$

* $exp_3(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

Relación entre Operadores :

Teniendo en cuenta que $\{x; b\} \subset R^+ / b \neq 1$;
se cumple :

1. $Antilog_b(Log_b x) = x$
2. $Antilog_b(Colog_b x) = x^{-1}$
3. $Log_b(Antilog_b x) = x$
4. $Colog_b(Antilog_b x) = -x$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Hallar :

$$M = \mathrm{Log}_{\sqrt{2}}16 + \mathrm{Log}_{27}9 + \mathrm{Log}_{\sqrt{5}}\sqrt[3]{25}$$

a) 11 b) 121/12 c) 125/12
d) 13 e) 10

02. Si :

$a * b = a^2 - b^2$
$a\%b = \mathrm{Log}_2(a-b)$

Calcular : $E = (5*3)^{(3a^2\%2a^2)}$.

a) 8a b) a^4 c) a^8
d) a^{16} e) $4a^2$

03. Si se cumple:

$$\mathrm{Log}\left(\frac{p^2+q^2}{2}\right) = \mathrm{Log}p + \mathrm{Log}q$$

Calcular : $\mathrm{Log}_q p + \mathrm{Log}_p q + 20$.

a) 22 b) 0 c) 7
d) 8 e) 4

04. Si : Log2 = a; Log3 = b, hallar el logaritmo de 5 en base 6 en términos de "a" y "b".

a) 1 b) $\frac{a+b}{a-b}$ c) $\frac{a+b}{ab}$
d) $\frac{1-a}{a+b}$ e) $\frac{a-1}{a+b}$

05. Indicar la suma de los 999 primeros términos de la sucesión :

$$\mathrm{Log}(1+1);\ \mathrm{Log}(1+\frac{1}{2});\mathrm{Log}(1+\frac{1}{3});.....$$

a) 1/2 b) 7 c) 3/2
d) 5 e) 3

06. Efectuar :

$$\frac{3}{\mathrm{Log}_2 45+3} + \frac{2}{\mathrm{Log}_3 40+2} + \frac{1}{\mathrm{Log}_5 72+1}$$

a) 2 b) -1 c) 1
d) 1/2 e) -1/2

07. Si : $a^3b^3 = a+b$; $ab \neq 1 \wedge a+b > 0$, hallar "x", de : $(a+b)^{\mathrm{Log}_{ab}x} = 64$.

a) 1/2 b) 2 c) 8
d) 4 e) 6

08. Calcular :

$$E = \left(\frac{1}{2+\mathrm{Log}_3 5}\right)\left(\frac{1}{1-\mathrm{Log}_{45}9}\right).\left(\frac{\mathrm{Ln}25}{\mathrm{Ln}3}\right)$$

a) 2 b) 5 c) 1/2
d) 1/5 e) 1/10

09. Calcular :

$$E = \mathrm{Colog}_6\ \mathrm{Antilog}_3(\mathrm{Log}_3 12+1)$$

a) 1/2 b) 2 c) -2
d) 1/4 e) -1/2

10. Si :

$\mathrm{Antilog}_c\ \mathrm{Antilog}_a b = ab$; $a, b, c \in R^+ - \{1\}$,
reducir :

$$E = \mathrm{Colog}_c\ a + \mathrm{Colog}_c\ b$$

a) 0 b) ab c) a^b
d) -ab e) $-a^b$

11. Hallar "x", de :

$$3\mathrm{Log}(2x) + 2\mathrm{Log}x = \mathrm{Log}\left(\frac{1}{4}\right)$$

a) 0,5 b) 1 c) -5
d) 2 e) -1/2

12. Resolver :

$$7x^{\mathrm{Log}_4 3} + 5(3^{\mathrm{Log}_4 x}) = 36$$

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

13. Dada la ecuación :

$$x\mathrm{Log}4 + \mathrm{Log}(\mathrm{Log}3) = \mathrm{Log}(\mathrm{Log}81)$$

El valor de "x" que le verifica es :

a) 6 b) 1 c) 8
d) 5 e) 4

14. Resolver la ecuación :

$$x + \mathrm{Log}(1+2^x) = x\,\mathrm{Log}5 + \mathrm{Log}6$$

Hallar : $\sqrt[x+1]{x-1}$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 8

15. Hallar "x".

$$Log_a x\, Log_b c = \frac{Log_b x Log_c x Log_a c}{1+Log_c a}$$

a) ab b) bc c) ac
d) a e) b

16. Dar la suma de soluciones de :

$$9\,Log_8 x + 2Log_x 8 = 9$$

a) 10 b) 8 c) 6
d) 12 e) 10

17. Resolver la ecuación :

$$(Log\ x)^{\frac{Colog\ Antilog\ x}{Log\,Logx}} = 10^{-2}$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

18. Hallar la mayor solución :

$$\sqrt{1+Log\,x} = Log^2 x - 1$$

a) $10\sqrt{10}$ b) $\sqrt[3]{10}$ c) $\sqrt{10}^{\sqrt{5}+1}$

d) $\sqrt{10}^{\sqrt{5}-1}$ e) $100\sqrt{10}$

19. Hallar "x", en :

$$\sqrt{99}^{x(1+Log_{99}x)} = \sqrt[3]{66}$$

a) 1/3 b) 3/2 c) 2/3
d) 1/9 e) 1/27

20. Señalar el producto de las tres raíces de :

$$x^{Log_2^2 x - Log_2 x^2 - 4} = (\frac{x}{64})$$

a) $4\sqrt{2}$ b) 4 c) 16
d) 8 e) 2

21. Calcular el logaritmo en base 16 del logaritmo de $2\sqrt{2}$ en base 8.

a) -1/4 b) 4 c) -4
d) 1/2 e) -8

22. Calcular :

$$9Log_8\left(\frac{1}{3}+Log_4\sqrt[3]{2}\right)^{-4}$$

a) 9 b) 12 c) 15
d) 18 e) 13

23. Si : $a\otimes b = (Log_3 a)(Log_3 b)$; $a>0 \wedge b>0$,

hallar : $E = 3^{5\oplus 9}$.

a) 27 b) 45 c) 15
d) 25 e) 9

24. Si : a > b > c > 1, reducir :

$$E = \frac{Log_c a + 1}{Log_c b . Log_b a^2 c^2}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{ac}{b}$ c) abc

d) 1 e) 2

25. Si : $10^a = 27; 10^b = 15$, hallar : Log2, en términos de "a" y "b".

a) $\frac{1}{3}(a+3b-3)$ b) $\frac{1}{3}(a-3b+3)$

c) $\frac{1}{3}(3b-a-3)$ d) $\frac{1}{3}(3b-a+3)$

e) $\frac{1}{3}(a+3b+3)$

26. Si : $a_k = \frac{k+1}{k}$.

Calcular : $Log_b a_1 + Log_b a_2 + ... + Log_b a_{99}$,

donde : $b = 10^{\frac{4}{7}}$.

a) 3 b) 2 c) 3,5
d) 4 e) 2,5

27. Si : $Log_a bc = x^n$; $Log_b ac = y^n$,
$Log_c ab = z^n$, para todo $n \varepsilon N$.

Calcular el valor de :

$$E = \frac{1}{n}\left[\sqrt[n]{\frac{1}{x^n+1}+\frac{1}{y^n+1}+\frac{1}{z^n+1}}\right]$$

a) 2n b) n c) n^2

d) $\frac{1}{n}$ e) $\frac{n}{2}$

28. Resolver :

$$Log_{Log(\frac{y}{x})}\sqrt[x]{x^y . y^x} = z$$

Si : 3Logy = 6Logx = 2Logz, indicar : xyz.

a) 4 b) 16 c) 64
d) 1 e) 0

29. Resolver :

$$x^{\frac{\text{Log}_5(\text{Log}_4 x)}{\text{Log}_5 x}} = -\text{Colog}_2 3$$

a) 1 b) 243 c) 9
d) 27 e) 81

30. Si $\sqrt[x^x]{x} = 10$, calcular :

$$M = \text{Log}\sqrt[\text{Log}\,x]{\text{Log}\sqrt[\text{Log}\,x]{\text{Log}\sqrt[\text{Log}\,x]{\text{Log}\,x}}}$$

a) 4 b) 3 c) 2
d) 1 e) 0

31. Hallar el valor de "n", si :

$$\text{Log}_3 9 + \text{Log}_3 9^2 + \text{Log}_3 9^3 + \ldots + \text{Log}_3 9^n = \text{Log}_3 9^{28}$$

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

32. Resolver para "x" :

$$\text{Log}_{\sqrt[b]{2}} x^a + \text{Log}_8 x^{ab} = 4b$$

a) $\sqrt[b]{2}$ b) $\sqrt[ab]{2}$ c) $\sqrt[a]{8}$

d) $\sqrt[b]{8}$ e) $\sqrt[ab]{8}$

33. Si :

$$6^{\text{Log}_2 3} + 10^{\text{Log}x} = 3^{\text{Log}_2 6} + \text{Log}_{\sqrt{x}} x$$

El valor de "x" es :

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

34. Resolver :

$$\text{Log}_x(3x^{\text{Log}_5 x} + 4) = 2\text{Log}_5 x$$

Indicar : $x^{\text{Log}_5 x}$.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 0

35. Calcular $\sqrt[x]{x}$, si :

$$\text{Log}_7 5^{\text{Log}7^{\text{Log}_5 x}} = \text{Log}\,\text{Log}_5 x$$

a) 5 b) 7 c) $\sqrt[5]{7}$

d) $\sqrt{5}$ e) $\sqrt[5]{5}$

36. Hallar "x" :

$$\text{Log}\left(\frac{x}{10}\right) + \text{Log}2a = \text{Log}a^{\frac{1}{2}}$$

a) $\frac{2\sqrt{2}}{a}$ b) $\frac{3\sqrt{a}}{a}$ c) $\frac{\sqrt{a}}{a}$

d) $\sqrt{a}$ e) $\frac{5\sqrt{a}}{a}$

37. Dar la suma de soluciones de la ecuación logarítmica:

$$\text{Log}\,\text{Log}(x - 5) + \text{Log}2 = \text{Log}\,\text{Log}(x + 1)$$

a) 11 b) 12 c) 24
d) 8 e) 10

38. Indicar una solución de :

$$\frac{\text{Log}_2 x + \text{Log}_x 2}{\text{Log}_2 x + 3} = \frac{1}{2}$$

a) 1 b) 4 c) 8
d) 16 e) 1/2

39. Indicar el producto de todas las soluciones de :

$$\text{Log}(x^2 - 8).\text{Log}(2 - x) = \frac{\text{Ln}(x^2 - 8)}{\text{Ln}(2 - x)}$$

a) -76/5 b) -9 c) 72
d) 24 e) -171/10

40. Resolver : $x^{\text{Log}x} = 9$.
Indicar la mayor solución :

a) 1 b) 1000 c) 10^9

d) 100 e) $10^{\sqrt{\text{Log}9}}$

41. Resolver :

$$\text{Log}(1 - \sqrt{x^2 - 1}) \geq 0$$

a) $< -1 ; 1 >$
b) $< -\infty ; -1] \cup [1 ; \infty >$
c) $< -\infty ; -1 > \cup < 1 ; \infty >$
d) $[-1 ; 1]$
e) $\{-1 ; 1\}$

42. Resolver :

$$\text{Log}_3(\text{Log}_{\frac{1}{2}}(x - 2)) > 0$$

a) $< 2 ; 5 >$ b) $< 2 ; \frac{5}{2} >$ c) $< 1 ; 2 >$

d) $< 2 ; 4 >$ e) $< 1 ; \frac{5}{2} >$

43. Resolver :

$$3(9^x)-10(3^x)+3<0$$

a) $x\,\varepsilon[-1;1]$ b) $x\,\varepsilon<-1;1>$
c) $x\,\varepsilon R$ d) $x\,\varepsilon<0;1>$
e) ϕ

44. Resolver :

$$27^{x-1}-9^{x-1}\leq 3^{x+1}-3^x$$

a) $<-\infty;1]$ b) $[-2;1]$
c) $<-\infty;2]$ d) $[-1;1]$
e) $[-1;2]$

45. Resolver :

$$1\geq\sqrt{5}^{x^2-3}\geq 25^{x-2}$$

a) $[-\sqrt{3};2]$ b) $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$
c) $[\sqrt{3};2]$ d) $[-\sqrt{2};3]$
e) $[-2;2]$

46. Resolver :

$$\pi^{\sqrt{4x-x^2+5}-3}<(\sqrt{2})^{\sqrt{x^2-4x-5}+2}$$

a) $x\,\varepsilon[-1;5]$
b) $x\,\varepsilon R-<-1;5>$
c) $x\,\varepsilon R-[-1;5]$
d) $x\,\varepsilon\{-1;5\}$
e) $x\,\varepsilon R$

47. Si :
$a>1;\ 0<b<1$, resolver el sistema adjunto :
$a^x>a^{3x-8}$ ..... (1)
$b^{x^2}>b^{6x}$ ..... (2)

a) $x\,\varepsilon<-1;2>$ b) $x\,\varepsilon<0;4>$
c) $x\,\varepsilon<-2;3>$ d) $x\,\varepsilon<-1;1>$
e) $x\,\varepsilon<0;5>$

48. Resolver :

$$\text{Log}_x(x^2-x)\geq 1$$

a) $<1;\infty>$ b) $[1;\infty>$ c) $<1;2]$
d) $[2;\infty>$ e) $<0;2]$

49. Resolver :

$$\text{Log}_x\left(\frac{x^2-x-6}{x+4}\right)\leq 1$$

a) $<-1;4]$ b) $[5;\infty>$ c) $<-1;2]$
d) $<0;1>$ e) $<3;\infty>$

50. Resolver :

$$\text{Log}_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x^2-4x-6}{4x-11}\right)\leq -1$$

a) $<-\infty;2]\cup<\frac{11}{4};4]$
b) $[2;\frac{11}{4}>\cup[4;\infty>$
c) $[2;4]-\{\frac{11}{4}\}$
d) $[-2;4]-\{\frac{11}{4}\}$
e) $[2;\infty>-\{\frac{11}{4}\}$

51. Si se define una función cuya regla de correspondencia es :

$$F(x)=\text{Log}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

Hallar el equivalente de :

$$E=F(a)+F(b)$$

a) $F\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$ b) $F\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$
c) $F\left(\frac{a+b}{1+a^2}\right)$ d) $F\left(\frac{2ab}{a-b}\right)$
e) $F\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

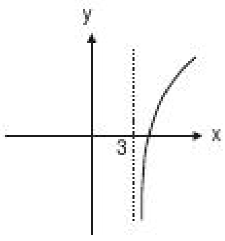
52. Obtener el dominio de la función definida por :

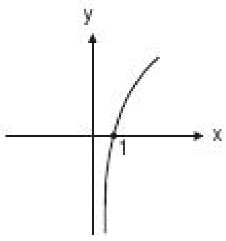
$$f(x)=\text{Ln}\left(\text{Ln}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$

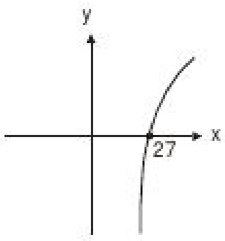
a) $<-e;1>$ b) $<-\infty;-1>$
c) $<1;+\infty>$ d) $<-1;1>$
e) $<\frac{1}{e};1>$

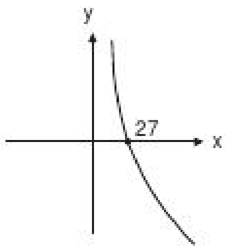
53. Indicar la gráfica de :

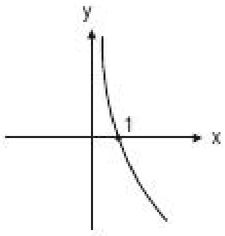
$$F(x) = 3 + \text{Log}_{\frac{1}{3}} x$$

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

54. Hallar el rango de la función definida por:

$$f(x) = \text{Log}_{\frac{1}{4}}(x^2 + 16)$$

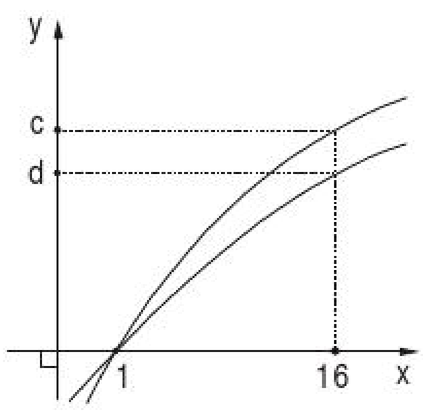
a) $\langle -\infty; 4]$
b) $\langle -\infty; -2]$
c) $[-2; +\infty\rangle$
d) $[4; +\infty\rangle$
e) $[2; +\infty\rangle$

55. Si se grafica :

$F: R^+ \to R \,/\, y = F(x) = \text{Log}_4 x$

$H: R^+ \to R \,/\, y = H(x) = \text{Log}_{16} x$,

se obtiene :

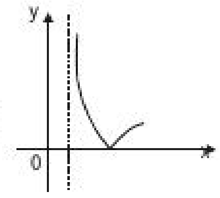


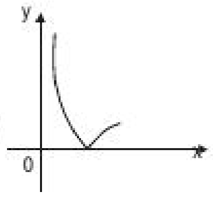
Calcular : $\frac{c}{d}$.

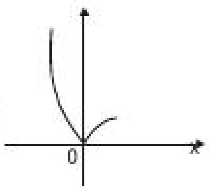
a) 1/3
b) 1/2
c) 1
d) 2
e) 3

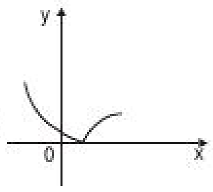
56. Hallar la gráfica de :

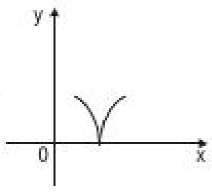
$$F(x) = |\, \text{Log}_{\frac{1}{2}}(x-2) - 3 \,|$$

a) 

b) 

c) 

d) 

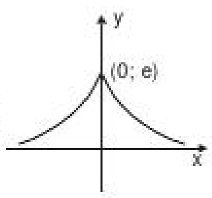
e) 

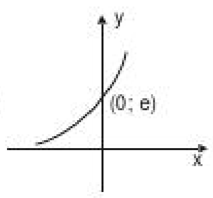
57. La gráfica de cierta función exponencial contiene al punto $P(\frac{3}{2}; 27)$.
Indicar la base y la regla de la función.

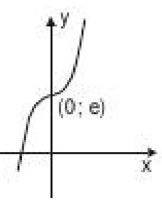
a) $b = 3;\ 3^{-x}$
b) $b = \frac{1}{3};\ (\frac{1}{3})^{2x}$
c) $b = 9;\ 9^{x}$
d) $b = \frac{1}{9};\ (\frac{1}{9})^{2x}$
e) $b = 3;\ 3^{\frac{1}{x}}$

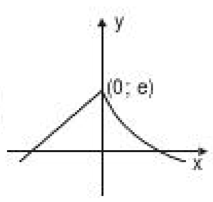
58. Obtener la gráfica de :

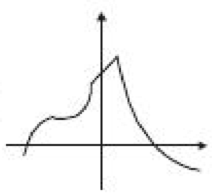
$$F(x) = e^{-x^2+1}$$

a) 

b) 

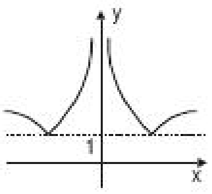
c) 

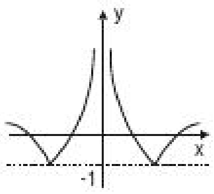
d) 

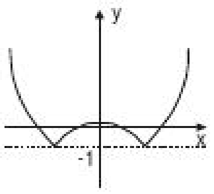
e) 

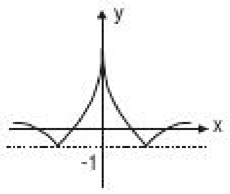
59. Hallar la gráfica de la función :

$$f(x) = |\,\text{Ln}|x|\,| - 1$$

a) 

b) 

c) 

d) 

e) N.A.

60. Hallar el campo de definición de :

$$H(x) = \sqrt[4]{\text{Ln}\sqrt{\text{Ln}[F[F[F(x+3]]]}}$$

siendo : $F(x) = x - 1$.

a) $x > 0$ b) $x \geq 1$ c) $x \geq e$

d) $x \geq e^e$ e) $x \,\varepsilon\, R^+$

61. Resolver :

$$(1{,}25)^{1-\text{Log}_2^2 x} < (0{,}64)^{2+\text{Log}_{\sqrt{2}} x}$$

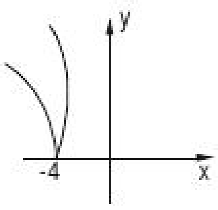
a) $x > 5$
b) $0 < x < 1$
c) $x > 3 \;\vee\; 0 < z < 2$
d) $x > 32 \;\vee\; 0 < z < 1/2$
e) $x > 5 \;\vee\; 1 < x < 1/32$

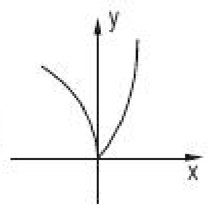
62. Si : A y B denotan respectivamente, los conjuntos solución de las desigualdades :

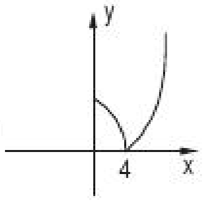
(I) $\text{Ln}(x^2 - 1) \leq \text{Ln}(1 - x)$
(II) $x^2 - 1 \leq 1 - x$

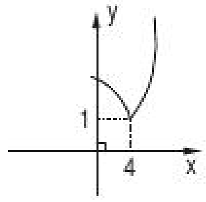
a) $A = B$ b) $A \subset B$
c) $B \subset A$ d) $A \cap B = \phi$
e) $A \cap B \neq \phi$; $A \subset B$; $B \subset A$

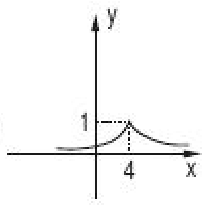
63. Si "f" es una función definida por :
$f(x) = |\,\text{Log}_5(5 - x)| + 1$, entonces, la figura que mejor representa la gráfica de "f" es :

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

64. Resolver :

$$\text{Log}_3 x - \text{Log}_2 x > 1$$

a) $< 0\,;\, 2^{\text{Log}_3 2} >$ b) $< 0\,;\, 3^{\text{Log}_2 3} >$

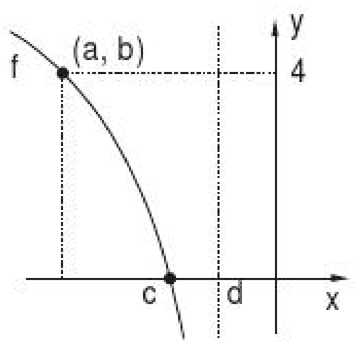
c) $< 0\,;\, 2^{\text{Log}_{(\frac{2}{3})} 3} >$ d) $< 0\,;\, 2^{\text{Log}_{(\frac{3}{2})} 3} >$

e) $< 0\,;\, 3^{\text{Log}_{(\frac{2}{3})} 3} >$

65. Resolver : $\text{Ln}(e^2 + e^{2-x} - 1) \geq x \;\wedge\; x \,\varepsilon\, Z^+$
indicando como respuesta el cardinal de su conjunto solución.

a) 2 b) 3 c) 5
d) 7 e) 10

66. En la figura adjunta, se muestra la gráfica de una función "f", definida por :
$f(x) = \text{Log}_2(-x - 3)$, entonces, el valor de:
$T = a + b + c + d$, es :



a) -24 b) -22 c) -21
d) 21 e) 22

67. Resolver :

$$\begin{cases} x - \text{Log}6 \leq x\text{Log}5 - \text{Log}(1 + 2^x) & \text{... (1)} \\ \text{Log}(\sqrt{x^2 - 4x - 1} + 3) > 0 & \text{... (2)} \end{cases}$$

a) $< -\infty\,;\, 1]$ b) $< -\infty\,;\, 2 - \sqrt{5}]$

c) $< 1\,;\, 2 + \sqrt{5}]$ d) $[2 + \sqrt{5}\,;\, \infty]$

e) $[2 - \sqrt{5}\,;\, 1 >$

68. Resolver :

$$\mathrm{Log}_{0,\widehat{3}}\sqrt{x+1} < \mathrm{Log}_{0,\widehat{3}}\sqrt{4-x^2}+1$$

e indicar cuántos valores de "x" la verifican.

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) Infinitos

69. Calcular el área de la superficie que describe el complejo "Z" que satisface :

$$\mathrm{Log}_{\sqrt{3}}\left(\frac{|Z|^2-|Z|+1}{2+|Z|}\right) \le 2$$

a) $25\pi\ u^2$ b) 5π c) $1,5\pi$
d) 10π e) 12π

70. Si : $|2a^2+4a-3|<3$, resolver :

$$\mathrm{Log}_a\left(\sqrt{x-\sqrt{3x-3}}\right)<0$$

a) $x > 3/2$ b) $x \ge 3/2$ c) $x \ge 1$
d) $x > 4$ e) $x < 4$

Claves

01.	e		26.	c		51.	b
02.	c		27.	d		52.	b
03.	a		28.	c		53.	d
04.	d		29.	c		54.	b
05.	e		30.	e		55.	d
06.	c		31.	c		56.	a
07.	d		32.	c		57.	c
08.	a		33.	b		58.	a
09.	c		34.	d		59.	b
10.	e		35.	a		60.	c
11.	a		36.	e		61.	d
12.	c		37.	d		62.	b
13.	b		38.	b		63.	d
14.	a		39.	d		64.	c
15.	c		40.	e		65.	a
16.	c		41.	e		66.	b
17.	c		42.	b		67.	b
18.	c		43.	b		68.	c
19.	c		44.	c		69.	a
20.	b		45.	b		70.	d
21.	a		46.	d			
22.	b		47.	b			
23.	d		48.	d			
24.	a		49.	e			
25.	b		50.	b			

Capítulo 17 PROGRESIONES

Progresión aritmética (P.A.)

Es aquella sucesión ordenada en la que cada término, excepto el primero, es igual al término anterior aumentado en un valor constante llamado ***razón*** de la progresión.

Representación de una P.A.

$$\div a_1 . a_2 . a_3 . \ ...... \ . a_n$$

$$\div a_1 . a_1 + r . a_1 + 2r . \ .... \ . a_1 + (n-1) r$$

Donde :

$\div$ = Inicio de la P.A.
$.$ = Separación de términos
a_1 = Primer término
a_n = Término n-ésimo
n = número de términos
r = razón de la P.A.

Clases de P.A.

1. Si : $r > 0$, la P.A. es creciente.
2. Si : $r < 0$, la P.A. es decreciente.

Observación :

Si, $r = 0$, se dice que la progresión aritmética es trivial.

Propiedades de una P.A.

Dada la siguiente progresión aritmética,

$$\div a_1 . a_2 . a_3 . \ ...... \ . a_{n-1} - a_n$$

se cumple :

1. ***Razón*** (r)

$$\boxed{r = a_2 - a_1 = a_3 a_2 = ... = a_n - a_{n-1}}$$

2. ***Término n-ésimo*** (a_n)

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) r}$$

3. ***Número de términos*** (n)

$$\boxed{n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1}$$

4. ***Términos equidistantes de los extremos*** (a_x y a_y)

$$\div a_1 . \underbrace{\ ... \ }_{\text{"m" términos}} . a_x . \ ... \ . a_y . \underbrace{\ ... \ }_{\text{"m" términos}} . a_n$$

$$\boxed{a_x + a_y = a_1 + a_n}$$

5. ***Término central (***a_c***)***

Siendo "n" impar, la P.A. admite término central.

$$\boxed{a_c = \frac{a_1 + a_n}{2}}$$

6. ***Suma de los "n" primeros términos de una P.A.*** (S_n)

6.1. $$\boxed{S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) . n}$$

6.2. $$\boxed{S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1) . r}{2} \right] . n}$$

Medios Aritméticos

Son los términos de una P.A. comprendido entre sus extremos, veamos un ejemplo :

$$\div 3 . \underbrace{7 . 11 . 15 . 19 . 23 . 27}_{\text{Medios aritméticos}} . 31$$

Interpolación de Medios Aritméticos

Consiste en formar una P.A., para lo cual se debe conocer los términos extremos y el número de medios que se quiere interpolar.

Sea la progresión aritmética :

$$\div a.\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{Medios aritméticos}}\ .b$$

Por fórmula : $a_n = a_1 + (n-1)r$

Reemplazando : $b = a + (m+1)r$

$$\boxed{r = \frac{b-a}{m+1}}$$

Fórmula cuyo nombre es razón de interpolación.

Progresión armónica (P. H.)

Es aquella sucesión ordenada, donde ninguno de sus términos es cero y los recíprocos de los mismos forman una progresión aritmética.

Si la sucesión :

$$a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;\ldots\ldots;\ a_n$$

es una progresión armónica, se verifica lo siguiente:

$$\div \frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}.\frac{1}{a_3}.\ \ldots\ldots.\frac{1}{a_n}$$

Progresión geométrica (P.G.)

Es aquella sucesión ordenada en la cual el primer término es diferente de cero y se caracteriza porque cualquier término, excepto el primero, es igual al término anterior multiplicado por un valor constante llamado ***razón*** de la progresión.

Representación de una P.G.

$$\because\ t_1 : t_2 : t_3 : \ldots\ldots : t_n$$

$$\because\ t_1 : t_1q : t_2q^2 : \ldots\ldots : t_1q^{n-1}$$

Donde :

- $\because$ = Inicio de la progresión.
- $:$ = Separación de términos.
- t_1 = Primer término.
- t_n = Término n-ésimo.
- n = Número de términos.
- q = Razón de la P.G.

Clases de P.G.

1. Si : $q > 1$, la P.G. es creciente.
2. Si : $0 < q < 1$, la P.G. es decreciente.
3. Si : $q < 0$, la P.G. es oscilante.

Propiedades de una P.G.

Dada la siguiente progresión geométrica,

$$\because\ t_1 : t_2 : t_3 : \ldots\ldots : t_{n-1} : t_n$$

se cumple :

1. ***Razón*** (q)

$$\boxed{q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \ldots. = \frac{t_n}{t_{n-1}}}$$

2. ***Término n-ésimo*** (t_n)

$$\boxed{t_n = t_1 . q^{n-1}}$$

3. ***Número de términos*** (n)
Teniendo en cuenta que t_n, t_1 y q son positivos.

$$\boxed{n = \frac{\text{Log}(t_n) - \text{Log}(t_1)}{\text{Log}(q)} + 1}$$

4. ***Términos equidistantes de los extremos*** (t_x y t_y)

$$\because\ \underbrace{t_1 : \ldots : t_x}_{\text{"m" términos}} : \ldots : \underbrace{t_y : \ldots : t_n}_{\text{"m" términos}}$$

$$\boxed{t_x . t_y = t_1 . t_n}$$

5. ***Término Central*** (t_c), siendo "n" impar, la P.G. admite término central.

$$\boxed{t_c = \sqrt{t_1 . t_n}}$$

6. ***Suma de los "n" primeros términos de una P.G.*** (S_n)

$$\boxed{S_n = t_1 . \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)}\ ;\ q \neq 1$$

7. ***Suma límite*** ($S_{Lím}$)

Para P.G. de infinitos términos, es decir en caso de que $n \to \infty$.

$$\boxed{S_{Lím} = \frac{t_1}{1-q}} \; ; -1 < q < 1$$

8. ***Producto de los "n" primeros términos de una P.G.*** (P_n)

$$\boxed{P_n = \sqrt{(t_1 \cdot t_n)^c}}$$

Medios geométricos

Son los términos de una P.G. comprendidos entre sus extremos, veamos un ejemplo :

$$\div\; 1 : \underbrace{2 : 4 : 8 : 16 : 32}_{\text{Medios geométricos}} : 64$$

Interpolación de medios geométricos

Consiste en formar una P.G., para lo cual se debe conocer los términos extremos y el número de medios que se quiere interpolar.

Sea la progresión geométrica :

$$\div\; a : \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{"m" medios geométricos}} : b$$

Por fórmula : $t_n = t_1 q^{n-1}$

Reemplazando : $b = a \cdot q^{m+1}$

$$\boxed{q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}}$$

Fórmula cuyo nombre es ***razón de interpolación***.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. En la siguiente P.A. :

$$\div(\alpha-7).5.(\alpha+3)$$

¿Cuál es el valor de " α " ?

a) 1 b) 3 c) 5
d) 7 e) 8

02. Si la suma de los 6 primeros términos de una P.A. es igual a la suma de los 10 primeros términos, calcular la suma de los 16 primeros términos.

a) 1 b) -1 c) 0
d) 2 e) F.D.

03. Sea la progresión aritmética $\div$ a.b.c.d.

Si la suma de sus términos es "n" y la razón es "2n".

Calcular : $E = a^2 - d^2$.

a) $-3n^2$ b) 12n c) $6n^2$
d) 4n e) $-n^2$

04. En una P.A. la diferencia de dos términos es 96 y la diferencia de sus respectivos lugares es 8.
La razón de la progresión es :

a) 5 b) 7 c) 9
d) 10 e) 12

05. En la siguiente P.A. :

$$\div 10 . \ldots\ldots . 76 . \ldots\ldots . 100$$

el número de términos comprendidos entre 10 y 76 es el triple del número de términos comprendidos entre 76 y 100. ¿Cuál es la suma de los términos de la P.A.?

a) 1031 b) 1412 c) 1705
d) 1836 e) 1914

06. Determinar el décimo quinto término de una P.A., si la suma de los primeros "n" términos está determinada por :

$$S_n = n(n+8)$$

a) 33 b) 35 c) 37
d) 39 e) 41

07. En una progresión aritmética, el término de lugar A es B y el término de lugar B es A. Calcular el valor de (A+ B), sabiendo que el segundo término de la progresión es el doble de su sexto término.

a) 11 b) 10 c) 2
d) 3 e) No se puede determinar

08. Si : x, y, z; son elementos consecutivos de una progresión aritmética, simplificar :

$$S = \frac{x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)}{(x+y+z)^3}$$

a) 1 b) 1/9 c) 7/9
d) 2/9 e) 4/9

09. Dos cuerpos que se encuentran a la distancia de 153 m uno del otro, se mueven al encuentro mutuo, el primero recorre 10 m/s y el segundo recorrió 3 m el primer segundo, en cada segundo siguiente recorre 5 m más que el segundo anterior. ¿Después de cuántos segundos los cuerpos se encuentran?

a) 2 s b) 4 c) 6
d) 10 e) 12

10. El quinto término de una P.A. es igual a 19 y el décimo es 39. ¿Cuántos términos hay que tomar para que su suma sea 465?

a) 12 b) 15 c) 19
d) 32 e) 22

11. De los tres primeros términos de una progresión aritmética, el término intermedio es 15 y el producto de los mismos es 2415. Entonces, el término del décimo primer lugar es :

a) 76 b) 77 c) 87
d) 97 e) 98

12. Una progresión aritmética está formada del 4 al 55. La suma de los 6 primeros números es 69, de los 6 siguientes es 177 y la suma de los 6 últimos es 285. El segundo y el décimo término de la progresión será :

a) 7 y 31 b) 10 y 34
c) 10 y 28 d) 13 y 37
e) 8 y 32

13. En una progresión aritmética, los elementos de los lugares j, k y (j+ k), son tales, que la suma de los primeros es igual al último menos 1. Si la suma de los primeros es "x", hallar la razón de la progresión.

a) $\frac{x}{(j+k-1)}$ b) $\frac{(x+2)}{(j+k)}$
c) $\frac{(x+1)}{(j+k-1)}$ d) $\frac{(x-2)}{(j+k-1}$
e) $\frac{(x+2)}{(j+k-1)}$

14. Determinar el término central de una progresión aritmética de 7 términos, sabiendo que la suma de los términos de lugar impar es 77 y los de lugar par 56.

a) 21 b) 15 c) 25
d) 19 e) 18

15. Indicar las raíces de la ecuación : $x^3 + px + q = 0$, si están en progresión aritmética ($p \neq 0$).

a) -q; 0; q

b) $-\sqrt{q}$; 0; $\sqrt{q}$

c) $-\sqrt{-p}$; 0; $\sqrt{-p}$

d) $\sqrt{p} - \sqrt{q}$; $\sqrt{p}$; $\sqrt{p} + \sqrt{q}$

e) $-\sqrt{p}$; 0; $\sqrt{p}$

16. Indicar la razón entre "x" e "y", de tal manera que el medio de lugar "r" entre "x" y "2y" sea el mismo que el medio de lugar "r" entre "2x" e "y". Habiendo "n" medios aritméticos interpolados en cada caso.

a) $\dfrac{1}{n-r}$ b) $\dfrac{n}{n+r-1}$ c) $\dfrac{1}{n+r-1}$

d) $\dfrac{r}{n+r-1}$ e) $\dfrac{r}{n+1-r}$

17. Asumiendo que S_{kn} es la suma de las "kn" primeros términos de una P.A., calcular el valor de : $\dfrac{S_{9n}}{S_{5n} - S_{4n}}$.

a) 3 b) 6 c) 9
d) 12 e) 15

18. Hallar un número tal que al restarle 8, multiplicarlo por $\sqrt{2}$ y por 4 se obtienen tres resultados que se encuentran en progresión geométrica.

a) 8 b) $\sqrt{2}$ c) $8\sqrt{2}$

d) 16 e) $16\sqrt{2}$

19. La suma de 3 números positivos en P.A. es 18. Si a estos números, se les suma 2, 4 y 11, respectivamente; los nuevos números forman una P.G. ¿Cuál es el mayor de los números primitivos?

a) 1 b) 3 b) 6
d) 9 e) 11

20. Hallar la razón de una P.A. cuyo primer término sea la unidad, tal que los términos de lugares : 2, 10 y 34 formen una P.G.

a) 2/5 b) 1/3 c) 3/4
d) 5/7 e) 2/3

21. Si se interpolan 5 medios geométricos entre 8 y 5832. ¿Cuál es el quinto término de la progresión total?

a) 1944 b) 648 c) 729
d) 2916 e) 625

22. El primer término de una progresión geométrica es igual a (x - 2), el tercer término es igual a (x + 6), y la media aritmética de los términos primero y tercero es al segundo como 5 es a 3.
Determinar el valor de "x".

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 7

23. La suma de los 3 primeros términos de una progresión geométrica es igual a 6 y la suma del segundo, tercero y cuarto términos es igual a -3. Calcular el décimo término.

a) -1/2 b) -1/8 c) -1/16
d) -1/64 e) No se puede determinar

24. La diferencia del tercer término con el sexto término de una P.G. es 26, si su cociente es 27. ¿Cuál es el primer término de la P.G.?

a) 245 b) 234 c) 243
d) 1/9 e) 5/9

25. La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente de infinitos términos es "m" veces la suma de sus "n" primeros términos. Hallar la razón de la progresión geométrica.

a) $\left[\dfrac{m-1}{m}\right]^{1/n}$ b) $\left[\dfrac{m-1}{m+1}\right]^{1/m}$

c) $\left[\dfrac{m-1}{m}\right]^{1/m}$ d) $\left[\dfrac{1}{mn}\right]^{1/m}$

e) $\left[\dfrac{m+1}{n-1}\right]^{1/n}$

26. El primer término de una sucesión geométrica es igual a x-2, el tercer término es igual a x+ 6, y la media aritmética de los términos primero y tercero es al segundo término de la sucesión como 5 es a 3. Hallar el sexto término de la sucesión y dar como respuesta la suma de sus cifras.

a) 6 b) 9 c) 18
d) 24 e) 23

27. Tres números enteros están en P.G. Si al último término se le resta 32, se forma una P.A.; pero si al segundo término de esta P.A., se le resta 4 se forma una nueva P.G. Según ello, señale la suma de los tres números enteros.

a) 50 b) 12 c) 62
d) 72 e) 60

28. En una P.G., el primer término es "a", la razón "q"; S_4 la suma de las cuartas potencias de los "n" términos de la progresión. Señale el equivalente de :

$$\left\{ \frac{S_4(q^4-1)}{a^2(q^{4n}-1)} \right\}^{1/2}$$

a) 1 b) Primer término
c) n d) Segundo término
e) Término central

29. Si los términos de lugar p; q y r de una P.G. son a, b, c, respectivamente, calcular : $a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}$.

a) 1/2 b) 1 c) 2
d) 3 e) abc

30. En una P.G. no oscilante el término de lugar "6a" es $3K^2$ y el término de lugar "4b" es 12, hallar el término de lugar "3a+ 2b".

a) 2abK b) 3ab c) ab
d) 3K e) 6K

31. Se interpolan cuatro medios geométricos entre 160 y 5. Hallar la suma de los dos últimos términos de la progresión geométrica formada.

a) 240 b) 200 c) 60
d) 35 e) 15

32. Calcular el límite de la suma :

$$S = 1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \frac{31}{256} + ...$$

a) 9/4 b) 8/3 c) 7/2
d) 6 e) 4

33. Calcular el límite de la suma :

$$S = \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{3}{3^6} + ...$$

a) 9/2 b) 2/9 c) 80/81
d) 9/8 e) 7/4

34. La suma de los medios geométricos de una serie de 4 términos es 42 y su diferencia 14.
Si la razón es mayor que uno, al calcular el primer y cuarto término se obtiene :

a) $a_1 = 6, a_4 = 48$

b) $a_1 = 8, a_4 = 64$

c) $a_1 = 7, a_4 = 56$

d) $a_1 = 10, a_4 = 270$

e) $a_1 = 8, a_4 = 216$

35. En la P.G. :

$$\sqrt{2} : \underbrace{.............}_{\text{"m" medios}} : a : \underbrace{...............}_{\text{"2m" medios}} 128\sqrt[4]{8}$$

Hallar "a", si la razón de la progresión es $\sqrt[4]{2}$.

a) 16 b) 8 c) 32
d) 4 e) 64

36. En una serie geométrica de números naturales de razón $r > 1$, $r \varepsilon N$, la suma de los n_o primeros términos es 31, ($n_o > 3$). Si a_o es el primer término de la serie. Calcular : $a_o + n_o$.

a) 4 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

37. En una P.A. de "n" términos, la suma de los (n-1) primeros términos es "n" y la suma de los (n-1) últimos términos es " n^2 ".
Hallar la razón de dicha progresión.

a) n b) $\frac{n}{2}$ c) $n^2 - 3$

d) n + 1 e) 2n - 3

38. Dados los términos :
$a_{m+n} = A$ y $a_{m-n} = B$ de una progresión geométrica $\{a_n\}$. Hallar : a_m .

a) $\sqrt{A}$ b) $\sqrt{AB}$ c) $\sqrt{B^m}$
d) $\sqrt{A^m}$ e) AB

39. En una P.G. de términos positivos, se observa que cada término es igual a la suma de los dos términos siguientes.
¿Cuál es la razón de la progresión?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

d) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

40. Se deja caer una pelota desde una altura de 90 m, en cada rebote la pelota se eleva 1/3 de la altura, de la cual cayó la última vez. ¿Qué distancia recorre la pelota hasta quedar en reposo?

a) 120 m b) 180 c) 90
d) 150 e) 140

41. Si : 2 + 14 + 26 + 38 + ... + x = 816, entonces, el valor de "x" es :

a) 110 b) 122 c) 134
d) 146 e) 158

42. A lo largo de un camino había un número impar de piedras a 10 m una de otra. Se quiso juntar éstas en un lugar donde se encontraba la piedra central. El hombre encargado podía llevar una sola piedra. Empezó por uno de los extremos y los trasladaba sucesivamente. Al recoger todas las piedras, el hombre caminó 3 km. ¿Cuántas piedras había en el camino?

a) 17 b) 41 c) 29
d) 13 e) 25

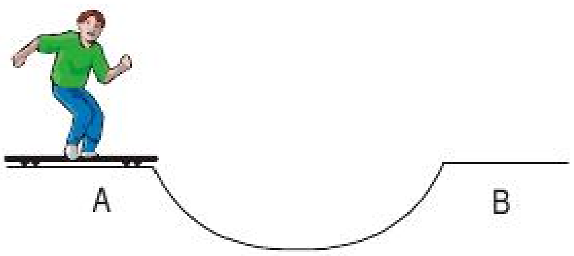
43. Dados los números, x, y, z, w; se observa que los tres primeros están en P.A. y los tres últimos en P.G. siendo la suma de los extremos 14 y la suma de los medios 12.
Hallar "x".

a) 3/4 b) 4/3 c) 1/2
d) 12 e) 18

44. Entre 2 y 162, entre 3 y 19683 se han interpolado el mismo número de medios geométricos. Calcular la diferencia de las razones, sabiendo que la razón de la primera es 1/3 de la razón de la segunda.

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

45. La figura representa a una persona en su "skate" que va a recorrer una rampa semicircular de longitud 180 π m de A hasta B, en cada viaje (de un extremo a otro), sólo recorre el 70% de lo recorrido en el viaje anterior. Calcular la distancia total que "barrió" con el skate hasta detenerse en el centro de la rampa.



a) 200 π b) 540 π c) 600 π
d) 900 π e) 1800 π

46. De una progresión aritmética, se sabe que:

$$S_n - T_n = (n+3)(n-1)$$

Donde :

S_n : suma de los "n" primeros términos.

T_n : término general.

Si : "n" es impar, indicar el término central.

a) n + 1 b) n + 2 c) n + 3
d) n + 4 e) n + 5

47. Los números reales a_1, a_2, ... a_n, son positivos y están en progresión aritmética de razón "r". Si :

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{a_1+\sqrt{a_2}}} + \frac{1}{\sqrt{a_2+\sqrt{a_2}}} + \frac{1}{\sqrt{a_3+\sqrt{a_4}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}+\sqrt{a_n}}}$$

entonces, la expresión simplificada de T_n en términos de "n", a_1 y a_n, es :

a) $\dfrac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{n-1}$ b) $\dfrac{n-1}{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}$

c) $\dfrac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}$ d) $\dfrac{1+n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$

e) $\dfrac{n}{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}$

48. Si, en una P.G. de cuatro términos se cumple que la suma del primero con el tercero es 117, además, la suma del cuarto con el segundo es 78.
Hallar la diferencia entre el cuarto y segundo término.

a) -30 b) -54 c) -81
d) -36 e) -45

49. En una P.A., el ultimo término es "u", la razón es "r" y sus valores se obtienen al resolver el siguiente sistema:

$u^3 - r^3 = 335$

$ur^2 - u^2r = -70$. Si : $r > 0$.

Si la suma de términos es 16, hallar el número de términos.

a) 9 b) 7 c) 4
d) 12 e) 5

50. Una persona nació en la segunda mitad del siglo pasado; un año que goza de la propiedad de que las cuatro cifras son tales que las tres diferencias formadas restando la primera cifra de la segunda, la segunda de la tercera y la tercera de la cuarta estén en P.G.
¿Cuántos años cumplirá el 2006?

a) 49 b) 54 c) 56
d) 57 e) 51

51. Dada la siguiente progresión geométrica,
P.G. $\div\div$ a : b : c .
Calcular :

$$E = a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$$

a) $a+b+c$ b) $a^4+b^4+c^4$
c) $a^2+b^2+c^2$ d) $a^4+b^3+c^2$
e) $a^3+b^3+c^3$

52. En una P.G. de seis términos decrecientes, se cumple que la suma de los términos extremos es $\sqrt{5}a$ y el producto de los medios es a^2.
Calcular la razón.

a) $\sqrt[5]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ b) $\sqrt[5]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$
d) $\sqrt[5]{3+\sqrt{5}}$ d) $\sqrt[5]{3-\sqrt{5}}$
e) Hay 2 respuestas

53. Sean : t_1^2 y S_1 el primer término y la suma límite de una P.G. decreciente.
Si t_1 es el primer término de una nueva P.G. en la cual la razón es la mitad de la razón de la anterior P.G.
El equivalente en la razón entre las sumas límites de la primera y la segunda P.G. expresada en términos de t_1 y S_1 es :

a) t_1+S_1 b) S_1-t_1 c) $\frac{t_1^2+S_1}{2t_1}$
d) $\frac{(t_1+S_1)}{2}$ e) $\frac{(t_1-S_1)}{2}$

54. Hallar la ecuación de segundo grado, cuyas raíces y el producto de ellas están en progresión geométrica creciente, además, el producto de sus raíces, la suma de ellas y la mayor de las raíces están en progresión aritmética.

a) $x^2+6x-8=0$ b) $x^2-6x+8=0$
c) $x^2-6x-8=0$ d) $x^2+6x+10=0$
e) $x^2+6x+8=0$

55. Se tiene 2 progresiones, una aritmética y otra geométrica, cuyos primeros términos son iguales e igual a la razón común, sabiendo que la suma de los 8 primeros términos de la progresión aritmética es igual a la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica. Hallar el noveno término de la progresión aritmética.

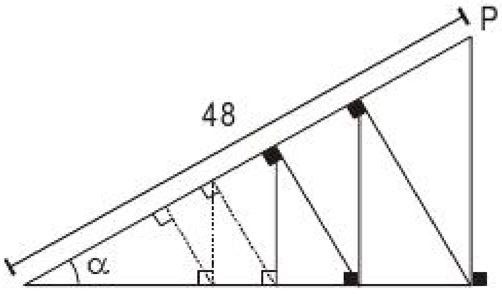
a) 35/41 b) 35/26 c) 36/35
d) 35/4 e) 35/36

56. Entre 2 y 18 se interpolan, en forma separada $\frac{a+b}{c}$; $\frac{a+c}{b}$ y $\frac{b+c}{a}$ términos, formando tres progresiones geométricas diferentes. Hallar el producto de las tres razones geométricas obtenidas.
Si : $a+b+c=n$.

a) 9^n b) 3^n c) $\sqrt[n]{3}$
d) 9 e) 3

57. Del gráfico, hallar la suma de todas las longitudes de las perpendiculares que se proyectan ilimitadamente a partir del punto "P".

$\text{Sen}\alpha = \frac{40}{41}$.



a) 10 b) 20 c) 30
d) 50 e) 60

58. Dada la progresión aritmética creciente :

$$\div a_1 . a_2 . a_3 .... a_n$$

sabiendo, que la suma de sus términos es "S" y que la suma de sus cuadrados es S_1^2, su razón "r", será :

a) $\sqrt{\frac{n S_1^2 - S^2}{n^2(n^2-1)}}$

b) $\sqrt{\frac{12(n S_1^2 - S^2)}{n^2(n^2-1)}}$

c) $\sqrt{\frac{2(n S_1^2 - S^2)}{n^2(n^2-1)}}$

d) $\sqrt{\frac{24(n S_1^2 - S^2)}{n^2(n^2-1)}}$

e) $\sqrt{\frac{6(n S_1^2 - S^2)}{n^2(n^2-1)}}$

59. Dadas las relaciones :

$\div \text{Log}_a x \,.\, \text{Log}_b y \,.\, \text{Log}_c z$

$\div\div\ x : y : z$

Calcular el valor que debe tomar el logaritmo de "z" en base "x".

a) $\text{Log}_a c$

b) $\dfrac{\text{Log}(a/b)}{\text{Log}(b/c)}$

c) $\dfrac{\text{Log}_a(a/b)}{\text{Log}_c(c/b)}$

d) $\dfrac{\text{Log}_a b}{1-\text{Log}_a}$

e) $\dfrac{1-\text{Log}_a b}{\text{Log}_c b-1}$

60. Si la expresión :

$$a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2$$

es un cuadrado perfecto, entonces, a, b, c; se encuentran formando :

a) Progresión aritmética.
b) Progresión geométrica.
c) Progresión armónica.
d) Progresión hipergeométrica.
e) Progresión aritmética de orden superior.

Claves

01.	d
02.	c
03.	a
04.	e
05.	c
06.	c
07.	b
08.	d
09.	c
10.	b
11.	c
12.	a
13.	b
14.	d
15.	c
16.	e
17.	c
18.	d
19.	d
20.	b
21.	b
22.	c
23.	d
24.	c
25.	a
26.	b
27.	c
28.	b
29.	b
30.	e

31.	a
32.	b
33.	d
34.	c
35.	b
36.	c
37.	a
38.	b
39.	d
40.	b
41.	c
42.	e
43.	d
44.	c
45.	c
46.	b
47.	c
48.	a
49.	c
50.	a
51.	e
52.	b
53.	c
54.	b
55.	e
56.	d
57.	e
58.	b
59.	e
60.	c